

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Límite de funciones

Código: ACANMA01.WPD

Ejercicio nº 1 .-Hallar el valor del límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$.

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)} - x$$

Ejercicio nº 2 .- (propuesto en septiembre de 2000)

El valor del siguiente límite es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1} \right)$$

- a) 1
- b) ∞
- c) Ninguno de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3 .- (propuesto en septiembre de 2000)

El valor del siguiente límite es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right]$$

- a) 1
- b) 5
- c) Ninguna de las anteriores repuestas.

Ejercicio nº 4 .-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$$

Ejercicio nº 5 .-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA01.WPD

Ejercicio nº 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x \cdot (x+1)} - x) = \sqrt{\infty \cdot (\infty + 1)} - \infty = \sqrt{\infty^2} - \infty = \infty - \infty$$

INDETERMINADO

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x \cdot (x+1)} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x \cdot (x+1)} - x) \cdot (\sqrt{x \cdot (x+1)} + x)}{\sqrt{x \cdot (x+1)} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x \cdot (x+1)})^2 - x^2}{\sqrt{x \cdot (x+1)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot (x+1) - x^2}{\sqrt{x \cdot (x+1)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x \cdot (x+1)} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x \cdot (x+1)} + x} = \frac{\infty}{\sqrt{\infty^2} + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINADO}$$

Volvemos a salvar la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x \cdot (x+1)} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = 0'5$$

Comprobación:

- para $x = 1000 \Rightarrow f(1000) = \sqrt{1000 \cdot 1001} - 1000 = 0'49987506 \approx 0'5$
- para $x = 10000 \Rightarrow f(10000) = \sqrt{10000 \cdot 10001} - 10000 = 0'4999875 \approx 0'5$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} = 0'5}$$

Ejercicio n° 2

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \sqrt{\infty^2 - \infty} - \sqrt{2 \cdot \infty^2 + 1} = \infty - \infty = \text{INDETERMINADO}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) \cdot (\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x})^2 - (\sqrt{2x^2 + 1})^2}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \\ &= \frac{-\infty^2 - \infty - 1}{\sqrt{\infty^2 - \infty} + \sqrt{2\infty^2 + 1}} = \frac{-\infty}{\infty} = \text{INDETERMINADO} \end{aligned}$$

NOTA: Se observa que el numerador es $-\infty^2$ y el denominador $\sqrt{\infty^2} = \infty$, por lo que podemos asegurar que el límite es $-\infty$.

No obstante lo haremos salvando la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = \text{Dividiendo numerador}$$

y denominador por la mayor potencia de x en el denominador =

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-x^2 - x - 1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} + \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 - x}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-\infty - 1 - \frac{1}{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\infty}} + \sqrt{2 + \frac{1}{\infty^2}}} = \frac{-\infty - 1 - 0}{\sqrt{1 - 0} + \sqrt{2 + 0}} = \frac{-\infty - 1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} = \frac{-\infty}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} = -\infty \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = -\infty}$$

Conclusión: La respuesta correcta es (C)

Comprobación:

$$x = 1000 \Rightarrow f(1000) = \sqrt{1000^2 - 1000} - \sqrt{2 \cdot 1000^2 + 1} = -414'714041$$

$$x = 10000 \Rightarrow f(10000) = \sqrt{10000^2 - 10000} - \sqrt{2 \cdot 10000^2 + 1} = -4142'635672$$

Ejercicio nº 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x} = \frac{3 \cdot \infty}{1+\infty} + \frac{2 \cdot \infty}{1-\infty} =$$
$$= \frac{\infty}{\infty} + \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINADO.}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{1+x}{x}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{1-x}{x}} =$$
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\frac{1}{x} + 1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{3}{\frac{1}{\infty} + 1} + \frac{2}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{3}{0+1} + \frac{2}{0-1} = 3 - 2 = \underline{\underline{1}}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right] = 1}$$

Conclusión: La respuesta correcta es (a).

Ejercicio nº 4.-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \text{sen } x}{x^2 + 1} = \frac{\infty \cdot [\text{entre } -1 \text{ y } 1]}{\infty^2 + 1} = \text{INDETERMINADO}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \text{sen } x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x \cdot \text{sen } x}{x}}{\frac{x^2 + 1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen } x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{\text{sen } \infty}{\infty + \frac{1}{\infty}} =$$
$$= \frac{\text{nº comprendido entre } -1 \text{ y } 1}{\infty + 0} = \frac{\overset{-1 \leq x \leq 1}{x}}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \text{sen } x}{x^2 + 1} = 0}$$

Ejercicio nº 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+0} - 1}{0} = \frac{\sqrt{1} - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - 1) \cdot (\sqrt{1+x} + 1)}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} = 0'5 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{2} = 0'5}$$

Comprobación:

- para $x = 0'001 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+0'001} - 1}{0'001} = 0'49987506$
- para $x = 0'0001 \Rightarrow \frac{\sqrt{1+0'0001} - 1}{0'0001} = 0'4999875$

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Límite de funciones

Código: ACANMA02.WPD

Ejercicio nº 1 .-Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{6}{x}$ cuando :

- a) x tiende a $+\infty$
- b) x tiende a $-\infty$
- c) x tiende a 0^-
- d) x tiende a 0^+

Ejercicio nº 2 .-Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{5}{x-4}$ cuando :

- a) x tiende a 4^-
- b) x tiende a 4^+
- c) x tiende a 5
- d) x tiende a $-\infty$
- e) x tiende a $+\infty$

Ejercicio nº 3 .-Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{5}{(x-4)^2}$ cuando :

- a) x tiende a 4^-
- b) x tiende a 4^+
- c) x tiende a 5
- d) x tiende a $-\infty$
- e) x tiende a $+\infty$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA02.WPD

Ejercicio n° 1

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = \frac{6}{+\infty} = 0 \quad (0^+)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = \frac{6}{-\infty} = 0 \quad (0^-)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{6}{x} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6}{x} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

Ejercicio n° 2

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5}{x-4} = \frac{5}{4^- - 4} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5}{x-4} = \frac{5}{4^+ - 4} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{x-4} = \frac{5}{5-4} = \frac{5}{1} = 5$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x-4} = \frac{5}{-\infty - 4} = \frac{5}{-\infty} = 0 \quad (0^-)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x-4} = \frac{5}{+\infty - 4} = \frac{5}{+\infty} = 0 \quad (0^+)$$

Ejercicio nº 3

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5}{(x-4)^2} = \frac{5}{(4^--4)^2} = \frac{5}{(0^-)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{5}{(x-4)^2} = \frac{5}{(4^+-4)^2} = \frac{5}{(0^+)^2} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{(x-4)^2} = \frac{5}{1^2} = \frac{5}{1} = 5$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{(x-4)^2} = \frac{5}{(-\infty-4)^2} = \frac{5}{(-\infty)^2} = \frac{5}{+\infty} = 0 \quad (0^+)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{(x-4)^2} = \frac{5}{(\infty-4)^2} = \frac{5}{\infty^2} = \frac{5}{+\infty} = 0 \quad (0^+)$$

U.N. .E.D. (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Límites de funciones

Código: ACANMA03.WPD

EJERCICIOS

- 1º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50}$$

- 2º) Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{-2x^2 - 9}$

- a) Cuando $x \rightarrow +\infty$
b) Cuando $x \rightarrow -\infty$

- 3º) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right)$$

- 4º) Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3}$ cuando x tiende a 3.

- 5º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^3 - 1} \right)$$

- 6º) Calcular el límite de la función $f(x) = e^{\frac{|x+1|}{x+1}}$ cuando x tiende a -1.

- 7º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - 4x|}{|2x - 8|}$$

EJERCICIOS

Código: ACANMA03.WPD

Ejercicio nº 1

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} = \frac{2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 - 25}{5^3 - 8 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 50} = \frac{250 - 525 + 300 - 25}{125 - 200 + 25 + 50} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

- Como $x=5$ es una raíz del polinomio numerador, la división:
 $2x^3 - 21x^2 + 60x - 25 : x - 5$ es exacta
- Como $x=5$ es una raíz del polinomio denominador, la división:
 $x^3 - 8x^2 + 5x + 50 : x - 5$ es exacta.

Efectuemos ambas divisiones por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -21 & 60 & -25 \\ 5 & & 10 & -55 & 25 \\ \hline & 2 & -11 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 5 & 50 \\ 5 & & 5 & -15 & -50 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

cociente: $c(x) = 2x^2 - 11x + 5$

cociente: $d(x) = x^2 - 3x - 10$

$$2x^3 - 21x^2 + 60x - 25 = (x-5) \cdot (2x^2 - 11x + 5)$$

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 50 = (x-5) \cdot (x^2 - 3x - 10)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (2x^2 - 11x + 5)}{(x-5) \cdot (x^2 - 3x - 10)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 3x - 10} = \\ &= \frac{2 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 5}{5^2 - 3 \cdot 5 - 10} = \frac{55 - 55}{25 - 25} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO} \end{aligned}$$

- Como $x=5$ es una raíz del polinomio $2x^2 - 11x + 5$, la división $2x^2 - 11x + 5 : x - 5$ es exacta.
- Como $x=5$ es una raíz del polinomio $x^2 - 3x - 10$, la división $x^2 - 3x - 10 : x - 5$ es exacta.

Efectuemos ambas divisiones:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -11 & 5 \\ 5 & & 10 & -5 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c(x) = 2x - 1 \\ 2x^2 - 11x + 5 = (x-5) \cdot (2x-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & -10 \\ 5 & & 5 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(x) = x + 2 \\ x^2 - 3x - 10 = (x-5) \cdot (x+2) \end{array}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (2x-1)}{(x-5) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{5 + 2} = \frac{9}{7}$$

Ejercicio nº 2

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{-2x^2 - 9} = \frac{4 \cdot \infty^3 - 5 \cdot \infty^2 + 6 \cdot \infty - 2}{-2 \cdot \infty^2 - 9} = \frac{\infty^3}{-\infty^2} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{-2x^2 - 9} = \frac{4 \cdot (-\infty)^3 - 5 \cdot (-\infty)^2 + 6 \cdot (-\infty) - 2}{-2 \cdot (-\infty)^2 - 9} = \frac{-4\infty^3 - 5\infty^2 - 6\infty - 2}{-2\infty^2 - 9} = \frac{-4\infty^3}{-2\infty^2} = +\infty$$

Ejercicio nº 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - x) = \sqrt[3]{\infty^3+\infty^2} - \infty = \infty - \infty = \text{INDÉT.} \end{aligned}$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - x)$

Sea $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x^3+x^2} \\ b = x \end{cases}$ Entonces $\begin{cases} a^3 = x^3+x^2 \\ b^3 = x^3 \end{cases}$

Ahora bien, la división $a^3 - b^3 : a - b$ es exacta.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{r} a^3 + 0a^2 + 0a - b^3 \\ -a^3 + 6a^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} a-b \\ a^2+6a+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6a^2 + 0a - b^3 \\ -6a^2 + 6^2a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6^2a - b^3 \\ -6^2a + b^3 \\ \hline \end{array}$$

0

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + 6a + b^2)$$

y por tanto $a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + 6a + b^2}$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a-b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^3 - b^3}{a^2 + 6a + b^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4} + \sqrt[3]{x^6 + x^5} + x^2} =$$

$$= \frac{\infty^2}{\sqrt[3]{\infty^6} + \sqrt[3]{\infty^6} + \infty^2} = \frac{\text{grados numerador } 2}{\text{grados denominador } 2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINADO}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4} + \sqrt[3]{x^6 + x^5} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4} + \sqrt[3]{x^6 + x^5} + x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^5}}{x^2} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^6 + 2x^5 + x^4}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^6 + x^5}{x^6}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\infty}} + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio n° 4.-

$$f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{|2 \cdot 3 - 6|}{3-3} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

Expresemos la función $f(x)$ por intervalos:

$$f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3} = \frac{2 \cdot |x-3|}{x-3} = \begin{cases} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2 & \text{si } x-3 > 0 ; x > 3 \\ \frac{2 \cdot (3-x)}{x-3} = \frac{-2 \cdot (x-3)}{x-3} = -2 & \text{si } x-3 < 0 ; x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3} = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Buscamos $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Como la recta $x=3$ divide a la función en dos gráficas diferentes, debemos hallar los límites laterales:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2) = -2 \\ &\hookrightarrow x < 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 = 2 \\ &\hookrightarrow x > 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Ejercicio nº 5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} \right) = \frac{1}{1^2-1} - \frac{5}{1^3-1} = \frac{1}{0} - \frac{5}{0} = \infty - \infty = \text{INDET.}$$

operamos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1-5(x^2-1)}{(x^2-1)(x^3-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1-5x^2+5}{x^5-x^2-x^3+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+4}{x^5-x^2-x^3+1} = \frac{1^3-5 \cdot 1^2+4}{1^5-1^3-1^2+1} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

Dividimos numerador y denominador entre $x-1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 0 & 4 \\ & & 1 & -4 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$c(x) = x^2 - 4x - 4$$

$$x^3 - 5x^2 + 4 = (x-1) \cdot (x^2 - 4x - 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$d(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

$$x^5 - x^3 - x^2 + 1 = (x-1) \cdot (x^4 + x^3 - x - 1)$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+4}{x^5-x^3-x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (x^2-4x-4)}{(x-1) \cdot (x^4+x^3-x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x-4}{x^4+x^3-x-1} =$$

$$= \frac{1^2-4 \cdot 1-4}{1^4+1^3-1-1} = \frac{-7}{0} = -\infty$$

U.N.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Derivadas. Funciones derivables

Código: ACANMA06.WPD

Ejercicios

1º) Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{5x}}$ con $x > 0$

b) $g(x) = \sqrt{Lx^2}$ con $x > 1$

c) $h(x) = e^{3x^2 + \sin(x^3 - 1)}$

d) $t(x) = \arctg(\cos x)$

2º) Comprobar el Teorema de Rolle para la función $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ en el intervalo cerrado $[0, 1]$.

3º) Calcular los siguiente límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \sin x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

4º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}}$$

5º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin e^x}{x}$$

6º) Halla el siguiente límite y justifica si es aplicable o no la regla de L'Hôpital en este caso

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

7º) Halla el siguiente límite y justifica si es aplicable o no la regla de L'Hôpital en este caso

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3x - 2}$$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANM06.WPD

Ejercicio nº 1.-

a) $f(x) = \sqrt[3]{5x}$ con $x > 0$

$$f(x) = \sqrt[6]{5x} = (5x)^{1/6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{6} (5x)^{\frac{1}{6}-1} \cdot (5x)' = \frac{1}{6} (5x)^{-\frac{5}{6}} \cdot 5 = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{(5x)^{5/6}} = \frac{5}{6 \sqrt[6]{(5x)^5}} = \frac{5}{6 \sqrt[6]{5^5 x^5}}$$

$$f'(x) = \frac{5}{6 \sqrt[6]{3125 x^5}} \rightarrow \text{función derivada de } f(x)$$

Notese que $f'(x)$ existe $\forall x \in (0, +\infty)$

b) $g(x) = \sqrt{Lx^2}$ con $x > 1$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{Lx^2}} \cdot (Lx^2)' = \frac{1}{2\sqrt{Lx^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{Lx^2} \cdot x^2} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{Lx^2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x \cdot \sqrt{Lx^2}} \rightarrow \text{función derivada de } g(x).$$

Notese que $g'(x)$ existe $\forall x \in (1, +\infty)$

c) $h(x) = e^{3x^2 + \arctan(x^3-1)}$

$$h'(x) = e^{3x^2 + \arctan(x^3-1)} \cdot [3x^2 + \arctan(x^3-1)]' = e^{3x^2 + \arctan(x^3-1)} \cdot [6x + \cos(x^3-1) \cdot 3x^2] =$$

$$= 3x \cdot [2 + x \cdot \cos(x^3-1)] \cdot e^{3x^2 + \arctan(x^3-1)}$$

$$h'(x) = 3x \cdot [2 + x \cdot \cos(x^3-1)] \cdot e^{3x^2 + \arctan(x^3-1)} \rightarrow \text{función derivada de } h(x)$$

$h'(x)$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$

d) $t(x) = \arctan(\cos x)$

$$t'(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{1 + \cos^2 x}$$

$$t'(x) = \frac{-\sin x}{1 + \cos^2 x} \rightarrow \text{función derivada de } t(x)$$

Notese que $\forall x \in \mathbb{R}$, $t'(x)$ existe

Ejercicio n° 2.-

Tenemos la función $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2} = (x-1) \cdot x^{\frac{2}{3}}$

Tenemos el intervalo cerrado $[0, 1]$

Veamos el teorema de Rolle aplicado a la función $f(x)$ y el intervalo cerrado $[0, 1]$:

- $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ es continua en $[0, 1]$ porque:

- * $f(x)$ es continua en todo $x \in (0, 1)$.

Esto es evidente ya que: $f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2}$ existe y además:
$$\lim_{x \rightarrow x} f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2} = f(x)$$

- * $f(x)$ es continua por la derecha de 0. En efecto:

$$f(0) = (0-1) \cdot \sqrt[3]{0^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = (0^+ - 1) \cdot \sqrt[3]{(0^+)^2} = -1 \cdot 0 = 0 = f(0)$$

- * $f(x)$ es continua por la izquierda de 1. En efecto:

$$f(1) = (1-1) \cdot \sqrt[3]{1^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (1^- - 1) \cdot \sqrt[3]{(1^-)^2} = 0 \cdot 1 = 0 = f(1)$$

Por tanto: $f(x)$ es continua en $[0, 1]$

- $f(x)$ es derivable en $(0, 1)$. En efecto:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)' \cdot x^{\frac{2}{3}} + (x-1) \cdot (x^{\frac{2}{3}})' = 1 \cdot x^{\frac{2}{3}} + (x-1) \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} \cdot (x)' = \\ &= x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \cdot (x-1) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-1)}{x^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

Observamos que $\forall x \in (0, 1)$, $f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$ existe.

Por tanto: $f(x)$ es derivable en $(0, 1)$

- Comprobemos si $f(0) = f(1)$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ visto anteriormente. Por tanto } f(0) = f(1)$$

Conclusión: La función $f(x)$ verifica el teorema de Rolle en $[0, 1]$

Entonces: $\exists c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$

Hallamos ese valor de c :

$$f'(c) = \sqrt[3]{c^2} + \frac{2 \cdot (c-1)}{3 \sqrt[3]{c}} = 0$$

$$\sqrt[3]{c^2} = - \frac{2 \cdot (c-1)}{3 \sqrt[3]{c}} ; \quad 3 \sqrt[3]{c^2} \cdot \sqrt[3]{c} = -2 \cdot (c-1)$$

$$3 \sqrt[3]{c^3} = -2c + 2$$

$$3c = -2c + 2 ; \quad 5c = 2 ; \quad c = \frac{2}{5} = 0.4$$

Es decir: Para $c = \frac{2}{5} = 0.4 \in (0, 1)$ se verifica que $f'(0.4) = 0$

Ejercicio n.º 3.-

$$\textcircled{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tg} 0 - \operatorname{sen} 0}{0 - \operatorname{sen} 0} = \frac{0-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x$ e $y = x - \operatorname{sen} x$ son continuas y derivables en $x=0$ y en un entorno de centro 0, podemos aplicar el teorema de L'Hôpital.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x)'}{(x - \operatorname{sen} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{1 - \cos^3 0}{\cos^2 0 - \cos^3 0} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{Indet.} \end{aligned}$$

Como las funciones $y = 1 - \cos^3 x$ e $y = \cos^2 x - \cos^3 x$ son continuas y derivables en un entorno de centro 0, podemos aplicar nuevamente la regla de L'Hôpital.

Por tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^3 x)'}{(\cos^2 x - \cos^3 x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{-2 \cos x \cdot \operatorname{sen} x + 3 \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cdot (-2 \cos x + 3 \cos^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \cos^2 x}{-2 \cos x + 3 \cos^2 x} = \frac{3 \cdot 1^2}{-2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2} = \frac{3}{-2 + 3} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x} = 3}$$

Comprobemos con calculadora:

$$x = 0.0001 \text{ rad} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} 0.0001 - \operatorname{sen} 0.0001}{0.0001 - \operatorname{sen} 0.0001} = \frac{5.001 \cdot 10^{-13}}{1.671 \cdot 10^{-13}} = \frac{5.001}{1.671} = \underline{\underline{2.992818671}}$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan x} = \frac{0}{0 + \tan 0} = \frac{0}{0 + 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Como las funciones $y = x$ e $y = x + \tan x$ son continuas y derivables en $x = 0$ y en un entorno de centro $x = 0$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x)'}{(x + \tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos 0} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x + \tan x} = \frac{1}{2} = 0.5}$

Comprobemos con calculadora:

$$x = 0.0001 \Rightarrow \frac{0.0001}{0.0001 + \tan 0.0001} = \frac{0.0001}{1.99999998 \cdot 10^{-4}} = 0.5$$

$$\textcircled{c} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x} = \frac{\tan 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $y = \tan 5x$ e $y = 3x$ son continuas y derivables en todo \mathbb{R} , podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan 5x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x \cdot 5}{3} = \frac{\cos 0 \cdot 5}{3} = \frac{1 \cdot 5}{3} = \frac{5}{3}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{3x} = \frac{5}{3} = 1.6}$

Comprobemos con calculadora:

$$x = 0.0001 \text{ rad.} \Rightarrow \frac{\tan 0.0005}{0.0003} = 1.666666597$$

$$\textcircled{d} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \tan x} = \frac{e^0 - e^{-0} - 2 \cdot 0}{0 - \tan 0} = \frac{1 - 1 - 0}{0 - 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $y = e^x - e^{-x} - 2x$ e $y = x - \tan x$ son continuas y derivables en todo \mathbb{R} , podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \tan x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{e^0 + e^0 - 2}{1 - \cos 0} = \frac{0}{0} = \text{Ind.}$$

Nuevamente aplicamos la regla de L'Hôpital dado que las funciones $y = e^x + e^{-x} - 2$ e $y = 1 - \cos x$ son continuas y derivables en todo \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x})'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \\ &= \frac{e^0 - e^{-0}}{\sin 0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}\end{aligned}$$

Como las funciones $y = e^x - e^{-x}$ e $y = \sin x$ son continuas y derivables en todo \mathbb{R} , podemos aplicar otra vez la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} \\ &= \frac{e^0 + e^0}{\cos 0} = \frac{1 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2\end{aligned}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \cos x} = 2}$

Comprobemos con calculadora:

$$x = 0.001 \Rightarrow \frac{e^{0.001} - e^{-0.001} - 2 \cdot 0.001}{0.001 - \cos 0.001} = \frac{3.2 \cdot 10^{-10}}{1.66666 \cdot 10^{-10}} = 1.92000768$$

Ejercicio nº 4.-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sin \frac{k}{\infty}}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Como las funciones $y = \sin \frac{k}{x}$ e $y = \frac{1}{x}$ son continuas y derivables en todo \mathbb{R} excepto en $x=0$, podemos aplicar L'Hôpital en este caso, ya que en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ ambas funciones son continuas y derivables.

Por tanto:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sin \frac{k}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{k}{x} \cdot \frac{-k}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k \cos \frac{k}{x}}{1} \\ &= k \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{k}{x} = k \cdot \cos \frac{k}{\infty} = k \cdot \cos 0 = k \cdot 1 = \underline{k}\end{aligned}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = k}$

Ejercicio nº 5.-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} e^x}{x} = \frac{\operatorname{sen} e^\infty}{\infty} = \frac{\text{números comprendidos entre } -1 \text{ y } 1}{\infty} = 0$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} e^x}{x} = 0}$

Ejercicio nº 6.-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = \frac{\infty + \operatorname{sen} \infty}{\infty} = \frac{\infty + \overset{-1 \leq x \leq 1}{\alpha}}{\infty} = 1 \rightarrow \text{El límite es } 1$$

Veamos si es aplicable la regla de L'Hospital:

Las funciones $y = x + \operatorname{sen} x$ e $y = x$ son continuas y derivables en todo \mathbb{R} , por lo que si podemos aplicar dicha regla, en principio

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \cos x) = \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \cos x \end{aligned}$$

Pero $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ no existe ya que la función $f(x) = \cos x$ es una función periódica que oscila entre -1 y 1 .

Por tanto: $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \operatorname{sen} x)'}{(x)'}$, esto es, no es aplicable la regla de L'Hospital.

No obstante, podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 + \frac{\text{nº entre } -1 \text{ y } 1}{\infty} = \\ &= 1 + 0 = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{sen} x}{x} = 1}$

Ejercicio nº 7

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3x - 2} = \frac{2^2 - 5 \cdot 2 + 1}{2^2 + 3 \cdot 2 - 2} = \frac{4 - 10 + 1}{4 + 6 - 2} = \frac{-5}{8} = -\frac{5}{8} = -0'625$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 + 3x - 2} = -\frac{5}{8} = -0'625$

Veamos si es aplicable o no la regla de L'Hospital:

Consideremos las funciones $f(x) = x^2 - 5x + 1$
 $g(x) = x^2 + 3x - 2$ } ambas funciones son continuas
y derivables en todo \mathbb{R} .

$$\text{Además: } \exists \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{2x + 3} = \frac{-1}{7}$$

Ahora bien: Ni $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$
Ni $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \pm \infty$ } Por tanto, no se cumplen
las condiciones para
aplicar la regla de L'Hospital.

U.N.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Fórmula de Taylor y Aplicaciones

Código: ACANMA07.WPD

EJERCICIOS

- 1º) Dada la función $f(x) = 2 + x - 2x^2 + 3x^3$, construir el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3, de la función $f(x)$ en el punto $a = 3$.
- 2º) Comprobar que la función $f(x)$ del ejercicio anterior y el polinomio de Taylor obtenido coinciden en todo $x \in \mathbb{R}$.
- 3º) Calcular $\sin x$ para $x \in (0,1)$, con un error menor o igual que $\frac{1}{720}$.
- 4º) Hallar el polinomio de Taylor de orden 5 de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo cerrado $[1,2]$ y valorar el error cometido.
- 5º) Sea la función $f(x) = x^3$. Hallar la función $f'(x)$ y, a la vista de la misma, decidir sobre la concavidad y convexidad de $f(x)$.
- 6º) Estudiar la concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3$.
- 7º) Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 + 3$, averigüese si en $x = 2$ la curva que representa a dicha función es cóncava o convexa. Hacer un esquema aproximado en el que se aprecie la posición de la curva con respecto a la tangente.
- 8º) Estudiar la concavidad o convexidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

- 9º) Determinar los puntos de inflexión de la curva que representa a la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$
- 10º) Determinar la concavidad y convexidad de la función $f(x) = -2x^2 + x - 5$

SOLUCIONES

CÓDIGOS: ACANMA07.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f(x) = 2 + x - 2x^2 + 3x^3$$

Polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3, de $f(x)$ en $a=3$

$$f(x) = 2 + x - 2x^2 + 3x^3 \rightarrow \text{función polinómica de grado 3}$$

$$P_3(x) = f(3) + \frac{f'(3)}{1!}(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}(x-3)^2 + \frac{f'''(3)}{3!}(x-3)^3$$

$$f(3) = 2 + 3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 = 2 + 3 - 18 + 81 = 68$$

$$f'(x) = 1 - 4x + 9x^2 \quad ; \quad f'(3) = 1 - 12 + 81 = 70$$

$$f''(x) = -4 + 18x \quad ; \quad f''(3) = -4 + 54 = 50$$

$$f'''(x) = 18 \quad ; \quad f'''(3) = 18$$

Entonces:

$$P_3(x) = 68 + \frac{70}{1!}(x-3) + \frac{50}{2!}(x-3)^2 + \frac{18}{3!}(x-3)^3$$

$$P_3(x) = 68 + 70 \cdot (x-3) + 25 \cdot (x-3)^2 + 3 \cdot (x-3)^3$$

Ejercicio nº 2.-

Como $f(x)$ es una función polinómica de grado 3 y $P_3(x)$ es la función polinómica de grado 3 que se aproxima a $f(x)$ en un entorno de centro 3, es normal que $f(x)$ y $P_3(x)$ coincidan, no sólo en dicho entorno, sino en todo \mathbb{R} .

$$\text{Es decir: } \forall x \in \mathbb{R} \text{ en } f(x) = P_3(x)$$

$$\text{O sea: } \forall x \in \mathbb{R} \text{ es } 2 + x - 2x^2 + 3x^3 = 68 + 70 \cdot (x-3) + 25 \cdot (x-3)^2 + 3 \cdot (x-3)^3$$

En efecto:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 68 + 70 \cdot (x-3) + 25(x-3)^2 + 3 \cdot (x-3)^3 = \\ &= 68 + 70x - 210 + 25(x^2 - 6x + 9) + 3 \cdot \left[\binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2(-3) + \binom{3}{2}x(-3)^2 + \binom{3}{3}(-3)^3 \right] = \\ &= 68 + 70x - 210 + 25x^2 - 150x + 225 + 3x^3 - 27x^2 + 81x - 81 = \\ &= 2 + x - 2x^2 + 3x^3 = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{Es decir: } \forall x \in \mathbb{R} \text{ en } P_3(x) = f(x)$$

Ejercicio n.º 3.-

Tenemos la función $f(x) = \sin x$.

Buscamos una "fórmula" que nos permita calcular $\sin x$ cuando $0 < x < 1$, de tal modo que el error cometido sea menor que $1/720$.

Veamos:

- Consideramos la función $f(x) = \sin x$. Es continua en todo \mathbb{R} .
- Consideremos el intervalo $[0, 1]$.
- Evidentemente $f(x) = \sin x$ es continua en $[0, 1]$.
- Las derivadas sucesivas de $f(x)$ son:

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x$$

$$\vdots$$

Es decir, existen todas las derivadas sucesivas de $f(x)$ y además son continuas en $(0, 1)$.

Por tanto: Podemos aplicar el Teorema de Taylor a la función $f(x) = \sin x$ en el intervalo $[0, 1]$.

Entonces:

$$\forall x \in (0, 1) \text{ se verifica que } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n + E_n(x)$$

$$\text{Siendo } E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} \text{ con } 0 < c < x$$

↳ error cometido.

$$\text{Pretendemos que } |E_n(x)| \leq \frac{1}{720}, \text{ es decir: } \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \cdot |x^{n+1}| \leq \frac{1}{720}$$

Es decir:

$$\frac{1}{(n+1)!} \cdot \left| f^{(n+1)}(c) \right| \cdot x^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{720}$$

↳ número positivo ≤ 1

$$\text{Tomando } n=5 \text{ tenemos que } \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}$$

Por tanto:

$$\sin x = \sin 0 + \frac{\cos 0}{1!}x + \frac{-\sin 0}{2!}x^2 + \frac{-\cos 0}{3!}x^3 + \frac{\sin 0}{4!}x^4 + \frac{\cos 0}{5!}x^5 + E_5(x)$$

$$\sin x \approx 0 + x + 0x^2 - \frac{1}{6}x^3 + 0x^4 + \frac{1}{120}x^5 = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 = P_5(x)$$

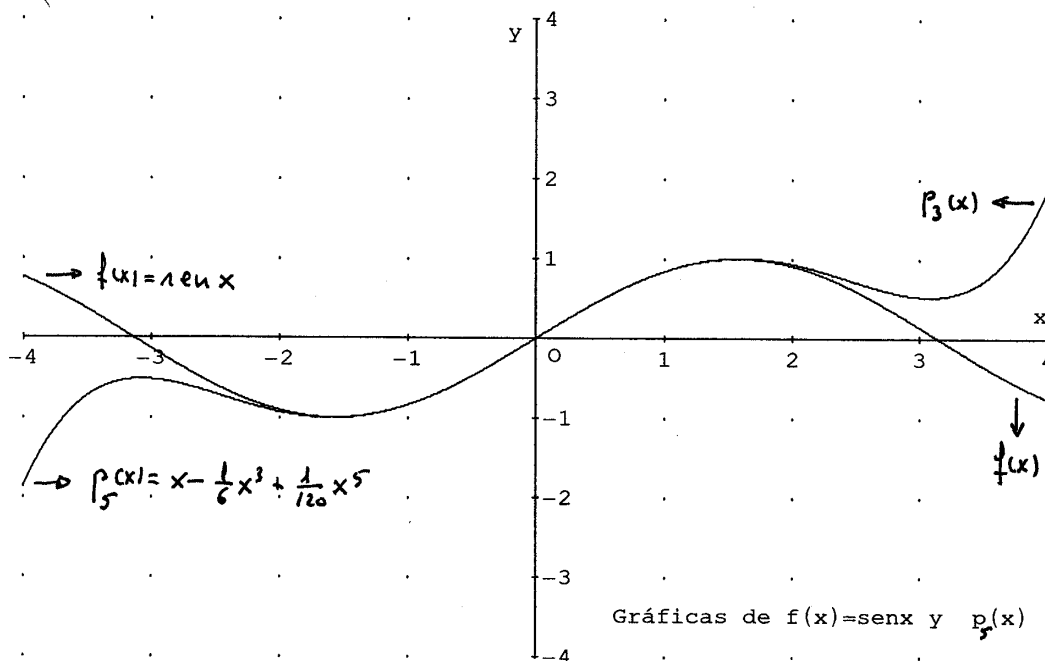
Por ejemplo:

$$\text{para } x = 0.2 \text{ rad} \Rightarrow \sin 0.2 \approx 0.2 - \frac{0.2^3}{6} + \frac{0.2^5}{120} = 0.198669333$$

Es decir:

Al considerar que $\sin 0.2 = 0.198669333$ cometemos un error $\leq \frac{1}{720}$

Disijemos las gráficas de $f(x)$ y $p_5(x)$:



En la gráfica puede apreciarse como $\forall x \in (0,1)$ es $f(x) \approx p_5(x)$

Ejercicio n° 4.-

Tenemos:

$[1,2]$ intervalo cerrado de \mathbb{R}

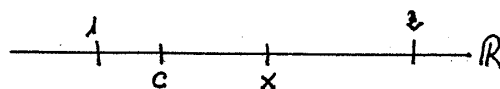
$f: [1,2] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ } función continua en $[1,2]$

Existen $f', f'', f''', f^{(4)}, f^{(5)}, f^{(6)}, \dots$ derivadas sucesivas de f

Para cada $x \in (1,2)$ se verifica que:

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 + E_5(x)$$

siendo $E_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}(x-1)^6$ con



Entonces:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f(1) = \sqrt[3]{1} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} ; f'(1) = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}} ; f''(1) = -\frac{2}{9}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{3} x^{-\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}} ; f'''(1) = \frac{10}{27}$$

$$f^{(iv)}(x) = -\frac{10}{27} \cdot \frac{8}{3} x^{-\frac{8}{3}-1} = -\frac{80}{81} x^{-\frac{11}{3}} = -\frac{80}{81\sqrt[3]{x^{11}}} ; f^{(iv)}(1) = -\frac{80}{81}$$

$$f^{(v)}(x) = \frac{80}{81} \cdot \frac{11}{3} x^{-\frac{11}{3}-1} = \frac{880}{243} x^{-\frac{14}{3}} = \frac{880}{243\sqrt[3]{x^{14}}} ; f^{(v)}(1) = \frac{880}{243}$$

El polinomio de Taylor es:

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(iv)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(v)}(1)}{5!}(x-1)^5 = \\ &= 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 - \frac{10}{243}(x-1)^4 + \frac{22}{729}(x-1)^5 = \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P_5(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2 + \frac{5}{81}(x-1)^3 - \frac{10}{243}(x-1)^4 + \frac{22}{729}(x-1)^5$$

Al considerar que para $x \in (1, 2)$ en $f(x) = P_5(x)$, cometemos el error

$$E_5(x) = \frac{f^{(vi)}(c)}{6!}(x-1)^6 \quad \text{siendo} \quad \begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad c \quad x \quad 2 \end{array} \quad 1 < c < x < 2$$

$$f^{(vi)}(c) = -\frac{880}{243} \cdot \frac{14}{3} x^{-\frac{14}{3}-1} = -\frac{12320}{729} x^{-\frac{17}{3}} = -\frac{12320}{729\sqrt[3]{x^{17}}} ; f^{(vi)}(c) = -\frac{12320}{729\sqrt[3]{c^{17}}}$$

$$E_5(x) = -\frac{\frac{12320}{729\sqrt[3]{c^{17}}}}{6!}(x-1)^6 = -\frac{154}{6561\sqrt[3]{c^{17}}}(x-1)^6$$

$$|E_5(x)| = \frac{154}{6561} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{c^{17}}} \cdot (x-1)^6 \leq \frac{154}{6561} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{154}{6561} \approx 0.023472031$$

$$\hookrightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow (x-1)^6 \leq 1$$

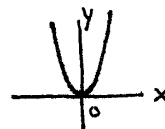
$$\hookrightarrow c \geq 1 \Rightarrow c^{17} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{c^{17}} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{c^{17}}} \leq 1$$

El error cometido es menor o igual que $\frac{154}{6561} \approx 0.023472031$

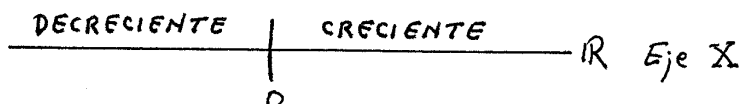
Ejercicio nº 5.-

$f(x) = x^3$ función continua y derivable en todo \mathbb{R}

$f'(x) = 3x^2$. Esta función es una parábola del tipo



Observamos que la función $f'(x) = 3x^2$ es:

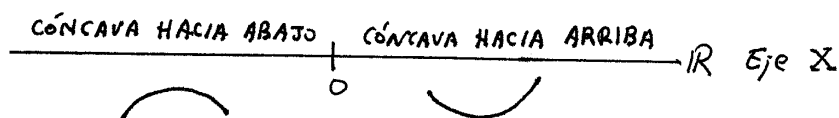


Es decir: $\left. \begin{array}{l} f'(x) \text{ es DECRECIENTE en } (-\infty, 0) \\ f'(x) \text{ es CRECIENTE en } (0, +\infty) \end{array} \right\}$

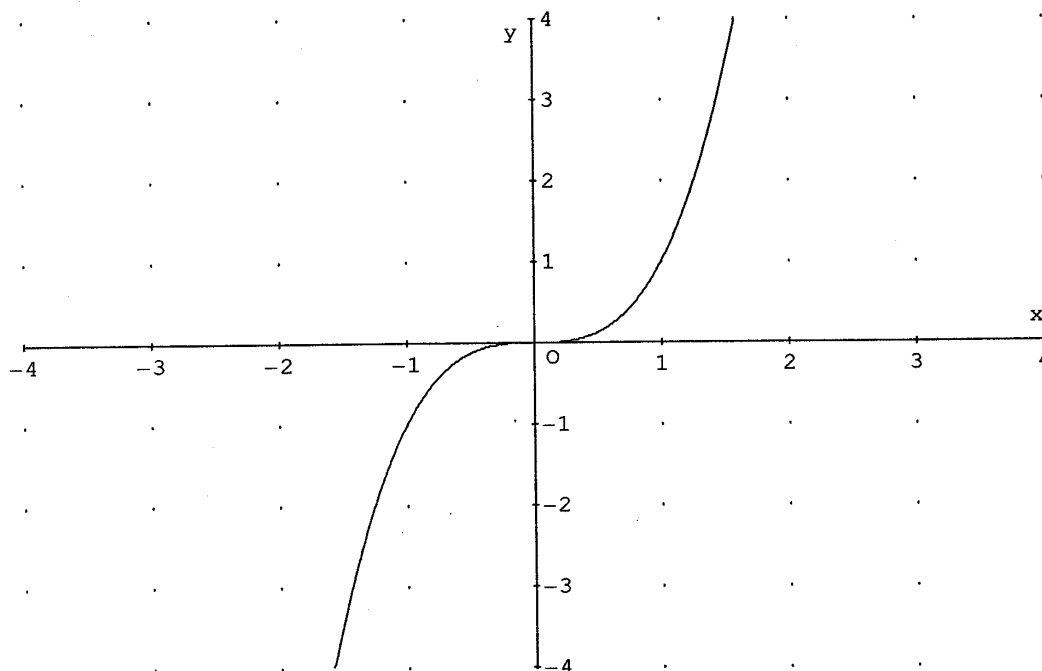
En los x donde $f'(x)$ es decreciente, la función $f(x)$ es cóncava hacia ABATO (o CONVEXA HACIA ARRIBA)

En los x donde $f'(x)$ es creciente, la función $f(x)$ es CONVEXA HACIA ABATO (o cóncava HACIA ARRIBA)

Es decir:





Dibujemos la gráfica de $f(x) = x^3$:



En la gráfica pueden apreciarse los resultados obtenidos.

Ejercicio nº 6.-

$$f(x) = x^3$$

- En los x donde $f''(x) > 0$, la función $f(x)$ es CONVEXA HACIA ABAJO: 
- En los x donde $f''(x) < 0$, la función $f(x)$ es CÓNCAVA HACIA ABAJO: 

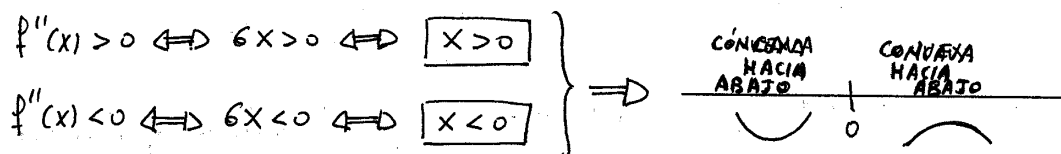
Veamos:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > 0}$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x < 0 \Leftrightarrow \boxed{x < 0}$$



Es decir:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ es cóncava hacia abajo en } (-\infty, 0) \\ f(x) \text{ es convexa hacia abajo en } (0, +\infty) \end{array}}$$

Ejercicio nº 7.-

$$f(x) = x^3 - x^2 + 3$$

- Si $f''(2) > 0$, entonces $f(x)$ es convexa hacia abajo en $x=2$
- Si $f''(2) < 0$, entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $x=2$

Veamos:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

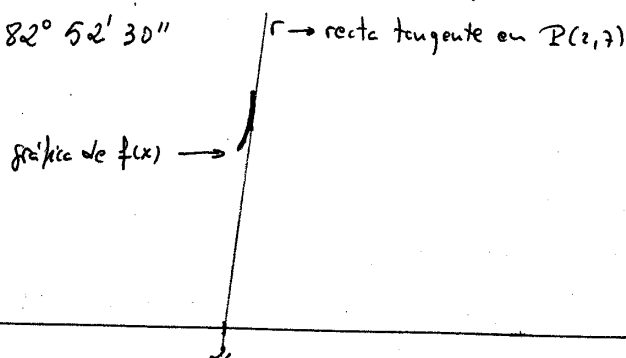
$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 2 = 10 > 0 \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ es convexa hacia abajo en } x=2}$$

Esquema aproximado:

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8 = \text{tangente del ángulo } \alpha \text{ que forma la recta tangente en el punto } P(2, f(2)) = (2, 7) \text{ con el eje de abscisas.}$

Entonces: $\alpha = \arctg 8 \approx 82^\circ 52' 30''$



Ejercicio nº 8.-

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

- En los x donde $f''(x) > 0$, la función $f(x)$ es convexa hacia abajo.
- En los x donde $f''(x) < 0$, la función $f(x)$ es convexa hacia arriba.

Veamos:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - 1 \cdot (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

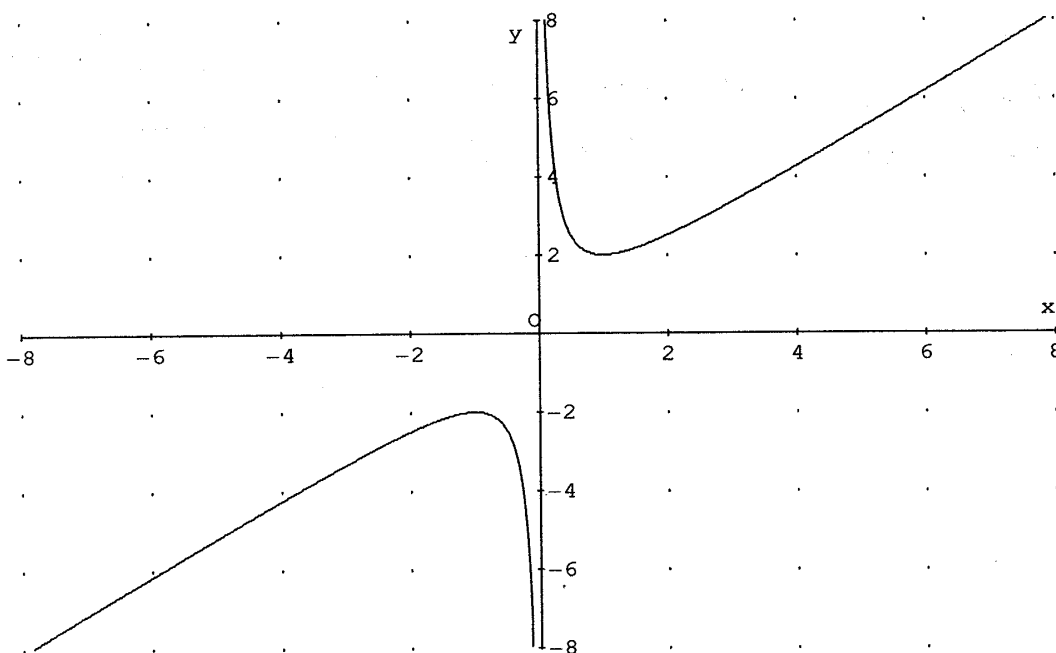
$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - 2x \cdot (x^2 - 1)}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} < 0 \Leftrightarrow x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{CONVEXA} \\ \text{HACIA ARRIBA} \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{CONVEXA} \\ \text{HACIA ABAJO} \end{array}$$

Por tanto:

$f(x)$ convexa hacia arriba en $(-\infty, 0)$
 $f(x)$ convexa hacia abajo en $(0, +\infty)$

Dibujemos la gráfica de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$



En la gráfica pueden apreciarse los resultados obtenidos.

También puede apreciarse como el eje de ordenadas ($x=0$) es una asíntota vertical de $f(x)$.

Observamos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x} = +\infty \end{array} \right\}$$

Ejercicio nº 9.-

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3 \rightarrow \text{¿puntos de inflexión?}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x$$

$$f''(x) = 12x - 10 \rightarrow \text{En los puntos donde } f''(x) = 0, \text{ posible inflexión.}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 10 = 0 \Rightarrow 12x = 10 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}} \rightarrow \text{posible inflexión.}$$

$$f'''(x) = 12$$

$$f'''(\frac{5}{6}) = 12 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x = \frac{5}{6} \text{ hay un punto de inflexión}}$$

Por tanto:

En $x = \frac{5}{6}$ la función cambia de concavidad-convexidad.

Analicemos como es el cambio:

$$f'''(\frac{5}{6}) = 12 > 0 \Rightarrow \text{La función } f''(x) \text{ es creciente en } x = \frac{5}{6}$$

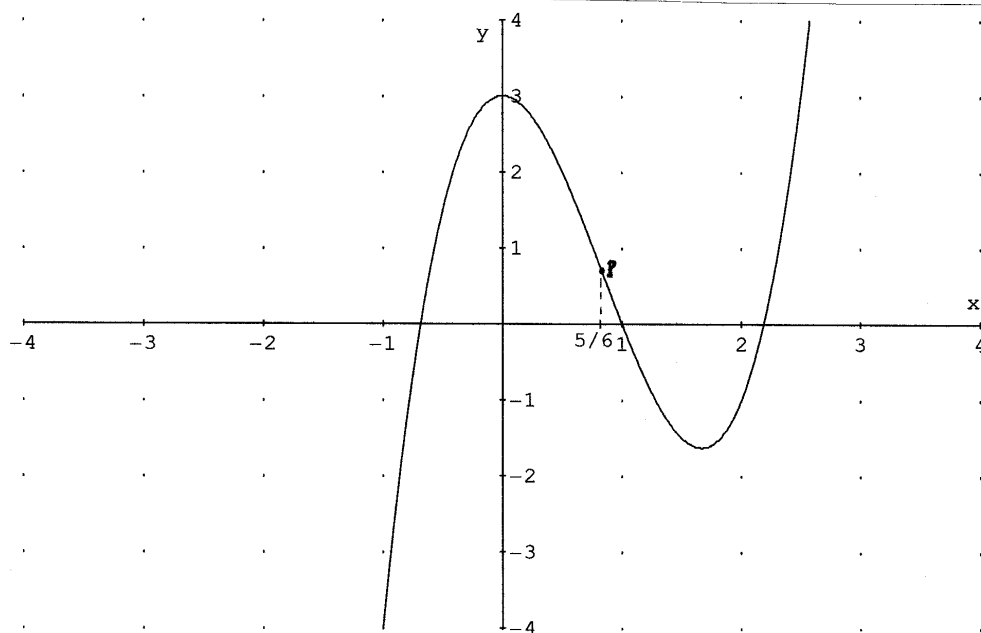
Como $f''(\frac{5}{6}) = 0$, entonces:

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ para } x = (\frac{5}{6})^- \text{ vale } f''(x) < 0 \\ \bullet \text{ para } x = (\frac{5}{6})^+ \text{ vale } f''(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ En la proximidad izquierda de } x = \frac{5}{6}, \text{ la} \\ \text{función } f(x) \text{ es cóncava hacia abajo} \\ \bullet \text{ En la proximidad derecha de } x = \frac{5}{6}, \text{ la} \\ \text{función } f(x) \text{ es convexa hacia abajo.} \end{array} \right.$$

Por tanto:

"En $x = \frac{5}{6}$ la función $f(x)$ pasa de cóncava hacia abajo a convexa hacia abajo"


Dibujemos la gráfica de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ para comprobar el resultado.



En la gráfica se aprecia como en el punto $P(\frac{5}{6}, f(\frac{5}{6}))$ la función cambia de cóncava hacia abajo a convexa hacia abajo.

Ejercicio n°10.-

$$f(x) = -2x^2 + x - 5$$

A simple vista nos damos cuenta que $f(x)$ es una función polinómica de grado 2, cuyo coeficiente principal es $-2 < 0$. La gráfica de $f(x)$ es una parábola del tipo , es decir, $f(x)$ es cóncava hacia abajo en todo \mathbb{R} .

Conclusión:

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en \mathbb{R}

No obstante, lo resolveremos por derivadas:

$$f'(x) = -4x + 1$$

$$f''(x) = -4$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ es } f''(x) = -4 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ cóncava hacia abajo en } \mathbb{R}$$

U.N.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2002/03***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** La Integral de Riemann

Código: ACANMA09.WPD

EJERCICIOS

Ejercicio nº 1.-

Demostrar que si f es una función integrable definida en $[a,b]$ y no negativa, su integral es no negativa.

Ejercicio nº 2.-

Dada una función constante $f(x) = k$ definida en el intervalo $[a,b]$, demostrar que su integral es igual a $k(b-a)$.

Ejercicio nº 3.-

Dada la función $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq c \\ r & \text{si } x = c \end{cases} \quad \text{siendo } c \in [a,b]$$

Demostrar que f es integrable y que $\int_a^b f = 0$

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 2001)

Sea $f: [-1,5] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en $[-1,5]$ y tal que $I = \int_{-1}^5 f(x) dx$.

- a) Si $f(x) \leq x$ para todo $x \in [-1,5]$, entonces $I < 10$.
- b) Si $f(x) \geq 2$ para todo $x \in [-1,5]$, entonces $I > 7$.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 5.-

Hallar el área del recinto plano limitado por las gráficas de las funciones siguientes:

$$f(x) = x^2 - 1 \quad y \quad g(x) = -x^2 + 1$$

Ejercicio nº 6.-

Dada la función $f(x)$ definida en el intervalo $[-2,3]$ de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ ax + 1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Determinar el valor de a para que la integral de $f(x)$ en $[-2,3]$ sea igual a 0.

EJERCICIOS

CÓDIGO: ACUNED09.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$\left. \begin{array}{l} f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \end{array} \right\} \text{función integrable.}$$

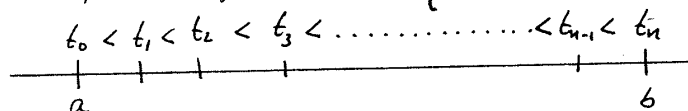
Debemos probar que $\int_a^b f \geq 0$

Veamos:

$$f \text{ integrable en } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f = \sup \{ s(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

siendo $s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1})$ = suma inferior de la función f respecto

de una partición genérica $P = \{a = t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_{n-1}, t_n = b\}$ con



$$m_i = \inf \{ f(x) \mid x \in [t_{i-1}, t_i] \}$$

Es evidente que $t_i - t_{i-1} \geq 0$ y $m_i \geq 0$
 \hookrightarrow por ser $t_{i-1} < t_i$ \hookrightarrow por ser $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Por tanto:

$$\text{Todas las } s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) \geq 0$$

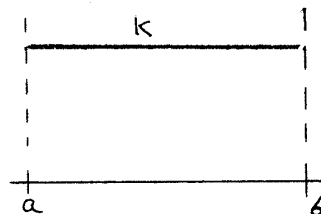
$$\Rightarrow \text{conclusión: } \int_a^b f = \sup \{ s(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(I) \} \geq 0 \quad \underline{\text{c.f.d.}}$$

Ejercicio nº 2.-

Dada una función constante $f(x) = k$ definida en el intervalo $[a, b]$, demostrar que $\int_a^b f = k \cdot (b - a)$

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = k \end{array} \right\} \text{Gráficamente}$$



$f(x) = k$ es continua en $[a, b]$ y por tanto es integrable.

Entonces:

$$\int_a^b f = \sup \{ S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}(I) \} \quad I = [a, b]$$

Sea $P = \{a = t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_n = b\}$ una partición cualquiera.

Sea $m_i = \inf \{ f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i \} = k \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ evidente.

luego:

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^n k \cdot (t_i - t_{i-1}) = k \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = \\ &= k [t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + t_3 - t_2 + t_4 - t_3 + \dots + t_n - t_{n-1}] = \\ &= k [t_n - t_0] = k \cdot (b - a) \quad \forall P \in \mathcal{P}([a, b]) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{\int_a^b f = k \cdot (b - a)} \quad \text{c. f. d.}$$

Ejercicio n° 3

Sea la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq c \\ r & \text{si } x = c \end{cases} \quad c \in (a, b)$$

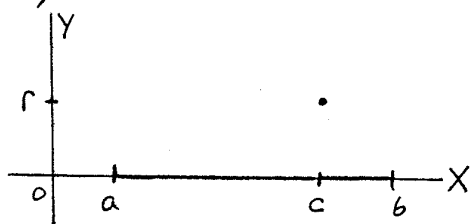
Demostrar que f es integrable y que $\int_a^b f = 0$

Solución:

Vamos a suponer que $r > 0$

La función f es continua en todo $[a, b]$ excepto en $c \in (a, b)$

Gráficamente:



Como f es una función acotada y continua en todo $[a, b]$ excepto en un punto, por el criterio de Dirichlet podemos asegurar que f es integrable, a decir, existe $\int_a^b f$.

Ejercicio n° 4.-

$$\left. \begin{array}{l} f: [-1, 5] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right\} \text{ función integrable en } [-1, 5] \text{ y } I = \int_{-1}^5 f(x) dx.$$

- Analicemos la alternativa (a)

$$\left. \begin{array}{l} g: [-1, 5] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x) = x \end{array} \right\} \text{ función integrable en } [-1, 5] \text{ por ser continua.}$$

Sabemos que $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [-1, 5]$

Por la propiedad de monotonía sabemos que:

$$\text{Si } f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [-1, 5], \text{ entonces } I = \int_{-1}^5 f(x) dx \leq \int_{-1}^5 g(x) dx$$

$$\text{Hallamos } \int_{-1}^5 g(x) dx = \int_{-1}^5 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^5 = \frac{5^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

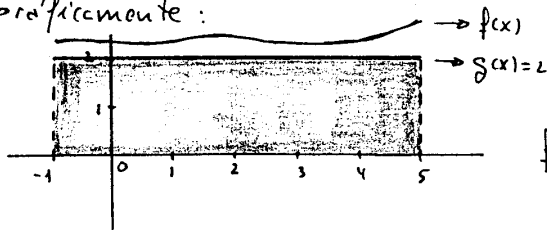
Podemos asegurar que $I = \int_{-1}^5 f(x) dx < 12$, pero no que $I < 10$.

Por tanto: la alternativa (a) es FALSA.

- Analicemos la alternativa (b)

Sabemos que $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in [-1, 5]$.

Gráficamente:



$$\left. \begin{array}{l} g: [-1, 5] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x) = 2 \end{array} \right\} \text{ función integrable en } [-1, 5]$$

$$f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [-1, 5] \Rightarrow \int_{-1}^5 f(x) dx \geq \int_{-1}^5 g(x) dx$$

$$\text{Hallamos } \int_{-1}^5 g(x) dx = \int_{-1}^5 2 dx = [2x]_{-1}^5 = 10 - (-2) = 12 = \text{Área sombreada.}$$

$$\text{Por tanto: } I = \int_{-1}^5 f(x) dx \geq 12 > 7 \Rightarrow \boxed{I > 7}$$

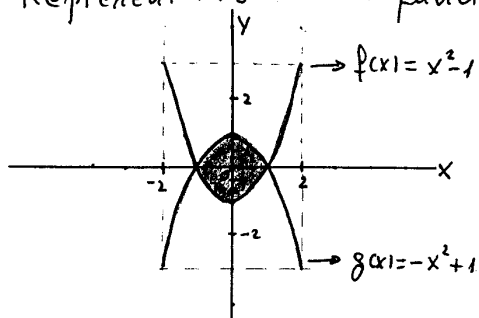
Conclusión: La alternativa correcta es (b)

Ejercicio n° 5.-

$f(x) = x^2 - 1$ parábola del tipo \cup

$g(x) = -x^2 + 1$ parábola del tipo \cap

Representemos ambas funciones:



Área buscada = Área nombrada = A

Es fácil ver que:

$$A = 2 \cdot \int_{-1}^1 g(x) dx = \text{doble del área}$$



Por tanto:

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = -\frac{1^3}{3} + 1 - \left(-\frac{(-1)^3}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

Tenemos $A = 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ u}^2$

$$A = \frac{8}{3} \text{ u}^2$$

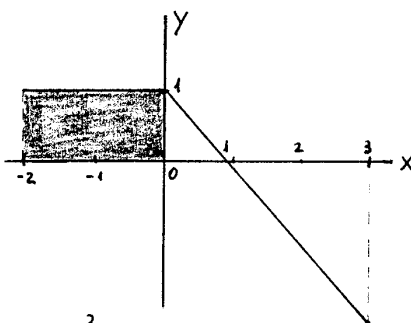
Ejercicio nº 6.

$$f: [-2, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ ax+1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

Debe ser $I = \int_{-2}^3 f(x) dx = 0$

$a = ?$



Veamos:

$$I = \int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx = \text{Área nombrada} + \int_0^3 (ax+1) dx = 2 + \left[\frac{ax^2}{2} + x \right]_0^3 = 0$$

Doncemos que $\frac{9a}{2} + 3 = -2$

$$9a = -10 \Rightarrow a = -\frac{10}{9}$$

U.N.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Series

Código: ACANMA10.WPD

EJERCICIOS

Ejercicio 1.- Propuesto en febrero de 2000.

La serie $\sum \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ es:

- A) Divergente
- B) Convergente
- C) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio 2.- Propuesto en febrero de 2000.

La serie $\sum \frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}$ es:

- A) Divergente
- B) Convergente
- C) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio 3.- Propuesto en febrero de 2000.

La serie $\sum \frac{(\lambda n)!}{n! (n+1)!}$ donde λ es un número natural:

- A) Converge si $\lambda = 2$
- B) Diverge si $\lambda = 1$
- C) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio 4.-

Estudiar la convergencia de la serie:

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{9} + \frac{4}{27} + \frac{5}{81} + \frac{6}{243} + \frac{7}{729} + \dots$$

SOLUCIONES

1º) Serie $\sum \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$

Término general $u_n = \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$ términos positivos.

Veamos los primeros términos:

$$u_1 = \frac{(1!)^2 \cdot 4^1}{(2 \cdot 1)!} = \frac{4}{2} = 2$$

$$u_2 = \frac{(2!)^2 \cdot 4^2}{(2 \cdot 2)!} = \frac{4 \cdot 4^2}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{4^2}{6} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

$$u_3 = \frac{(3!)^2 \cdot 4^3}{(2 \cdot 3)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4^3}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4^3}{20} = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$$

$$u_4 = \frac{(4!)^2 \cdot 4^4}{(2 \cdot 4)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4^4}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{4^4}{70} = \frac{2^7}{35} = 3\frac{1}{5} \dots$$

A simple vista parece que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$

Como límite de u_n cuando $n \rightarrow \infty$ deber ser:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \quad \text{Condición necesaria para que la serie sea convergente.}$$

Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow \text{La serie de términos positivos es DIVERGENTE.}$$

Por tanto: La respuesta es (A)

NOTA: Este razonamiento no es riguroso, pero es válido para contestar correctamente a la pregunta del test.

Hagamos otro intento de demostración más riguroso:

Aplicaremos el criterio del cociente o de D'Alembert.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{[(n+1)!]^2 \cdot 4^{n+1}}{[2(n+1)]!}}{\frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot 4^{n+1} \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n! \cdot n! \cdot 4^n} =$$

2º) $\sum \frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!}$ serie de términos positivos.

Aplicaremos el criterio del cociente o de D'Alembert:

$$u_n = \frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!} \quad u_{n+1} = \frac{2^{4(n+1)-3}}{[4(n+1)-3]!}$$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{4(n+1)-3} \cdot (4n-3)!}{2^{4n-3} \cdot [4(n+1)-3]!} = \frac{2^{4n+1} \cdot (4n-3)!}{2^{4n-3} \cdot (4n+1)!} = \\ &= \frac{2^{4n+1-(4n-3)} \cdot (4n-3)!}{(4n+1) \cdot (4n) \cdot (4n-1) \cdot (4n-2) \cdot (4n-3)!} = \frac{2^4}{(4n+1) \cdot 4n \cdot (4n-1) \cdot (4n-2)} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{(4n+1) \cdot 4n \cdot (4n-1) \cdot (4n-2)} = \frac{16}{\infty} = 0$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum \frac{2^{4n-3}}{(4n-3)!} \text{ es CONVERGENTE}$$

La respuesta es (B)

3º) $\sum \frac{(kn)!}{n!(n+1)!}$ $k \in \mathbb{N}$. serie de términos positivos.

Aplicaremos el criterio del cociente o de D'Alembert.

$$u_n = \frac{(kn)!}{n! \cdot (n+1)!} \quad u_{n+1} = \frac{[k(n+1)]!}{(n+1)! \cdot [(n+1)+1]!}$$

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \frac{[\lambda(n+1)]! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(n+1)! \cdot [(n+1)+1]! \cdot (\lambda n)!} = \frac{(\lambda n + \lambda)! \cdot n!}{(n+2)! \cdot (\lambda n)!} = (*)$$

Si $\lambda = 1$

$$(*) = \frac{(n+1)! \cdot n!}{(n+2)! \cdot n!} = \frac{(n+1)!}{(n+2) \cdot (n+1)!} = \frac{1}{n+2}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1$$

La serie es CONVERGENTE

La respuesta (B) es FALSA

Si $\lambda = 2$

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{(2n+2)! \cdot n!}{(n+2)! \cdot (2n)!} = \frac{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot \cancel{(2n)!} \cdot n!}{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{(2n)!}} = \frac{(2n+2) \cdot (2n+1)}{(n+2) \cdot (n+1)} \\ &= \frac{2 \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{(n+2) \cdot (n+1)} = \frac{4n+2}{n+2} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{n+2} = 4 > 1$$

La serie DIVERGE

La respuesta (A) es FALSA

La respuesta correcta es (C)

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2001/02***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Límites de funciones

Código: ACANMA12.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 1996)

El valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ es:

- a) $5/4$
- b) $3/2$
- c) $\pi/4$

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 1997)

El valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x}$ es:

- a) Mayor que 1
- b) Menor que 0
- c) Ninguno de los anteriores.

Ejercicio nº 3.-

Hallar el límite de la función $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x}$ cuando x tiende a cero.

Ejercicio nº 4.-

Hallar el límite de la función $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ cuando $x \rightarrow +\infty$

Ejercicio nº 5.-

Hallar el límite de la función $f(x) = \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$ cuando $x \rightarrow 0$

Ejercicio nº 6.- (propuesto en febrero de 2002)

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \sin \frac{\pi}{x} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Se tiene:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$
- b) No existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

código: ACANMA12.WPD

Calculemos el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \frac{\sqrt{1+0} - 1}{\sqrt[3]{1+0} - 1} = \frac{\sqrt{1} - 1}{\sqrt[3]{1} - 1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado}$$

Llamamos $y^3 = 1+x$. Entonces, cuando $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y^3} - 1}{\sqrt[3]{y^3} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y^3} - 1}{y - 1} = \frac{\sqrt{1^3} - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{indeter.}$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{y^3 - 1}}{y - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{y^3 - 1}) \cdot (\sqrt{y^3 + 1})}{(y - 1) \cdot (\sqrt{y^3 + 1})} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{y^3})^2 - 1^2}{(y - 1) \cdot (\sqrt{y^3 + 1})} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{(y-1)(\sqrt{y^3+1})} = \frac{1^3 - 1}{(1-1)(\sqrt{1^3+1})} = \frac{0}{0} = \text{indeterm.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^3 - 1}{(y-1)(\sqrt{y^3} + 1)} = (*)$$
$$\begin{array}{r} y^3 + 0y^2 + 0y - 1 \\ -y^3 + y^2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} y-1 \\ y^2 + y + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} s^2 \\ -s^2 + s \\ \hline s \\ -s + 1 \\ \hline 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow y^3 - 1 = (y - 1) \cdot (y^2 + y + 1) + 0$$

$$(*) = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{(y-1) \cdot (y^2 + y + 1)}{(y-1) \cdot (\sqrt{y^3} + 1)} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 + y + 1}{\sqrt{y^3} + 1} = \frac{1^2 + 1 + 1}{\sqrt{1^3} + 1} = \frac{3}{2} = \underline{\underline{1'5}}$$

La respuesta correcta es (6)

Ejercicio nº 2

Calculamos el $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{1 + \cos^3 0}{\cos^2 0 - \cos^3 0} = \frac{1 + 1^3}{1^2 - 1^3} = \frac{2}{0} = \begin{cases} 0 + \infty \\ 0 - \infty \end{cases}$$

Es decir, el límite es $+\infty$ o $-\infty$. Veamos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } x = 0^+ \text{ rad} \\ x = 0^- \text{ rad} \end{array} \right\} \Rightarrow \cos x = 1^- \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = (1^-)^2 = 1^- \\ \cos^3 x = (1^-)^3 = 1^- \end{cases} \text{ con } \cos^3 x < \cos^2 x$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \frac{1 + \cos^3 0}{\cos^2 0 - \cos^3 0} = \frac{2}{0^+} = \underline{\underline{+\infty}} > 1$$

Por tanto: la respuesta correcta es **(a)**

Ejercicio nº 3

Hallamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \frac{\tan 2 \cdot 0}{\tan 0} = \frac{\tan 0}{\tan 0} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado.}$$

Resolvamos la indeterminación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \tan x \cdot \cos x}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \\ &= 2 \cdot \cos 0 = 2 \cdot 1 = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \sqrt{\infty+\sqrt{\infty}} - \sqrt{\infty} = \sqrt{\infty+\infty} - \sqrt{\infty} = \infty - \infty = \text{IND.}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\infty}}{\sqrt{\infty+\sqrt{\infty}} + \sqrt{\infty}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminado}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x}}{x}} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{x}{x^2}}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{\infty}}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0'5 \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} = 0'5}$$

Comprobación:

$$x = 10000 \Rightarrow f(10000) = \sqrt{10000 + 100} - \sqrt{10000} = 0'498756 \dots \dots$$

$$x = 1000000 \Rightarrow f(1000000) = \sqrt{1000000 + 1000} - \sqrt{1000000} = 0'4998750 \dots \dots$$

Ejercicio nº 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{1e n^2 x} = \frac{\cos 0 - \sqrt{\cos 0}}{1e n^2 0} = \frac{1 - \sqrt{1}}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{Indet.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{1e n^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - \sqrt{\cos 2x}) \cdot (\cos x + \sqrt{\cos 2x})}{1e n^2 x \cdot (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - (\sqrt{\cos 2x})^2}{1e n^2 x \cdot (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{1e n^2 x \cdot (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{1e n^2 x \cdot (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1e n^2 x \cdot (\cos x + \sqrt{\cos 2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}} = \frac{1}{\cos 0 + \sqrt{\cos 0}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0'5$$

Ejercicio nº 6

Para hallar el $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ debemos hallar los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{2}x^2 + \arctan \frac{\pi}{x} \right) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 + \arctan \frac{\pi}{1} = \frac{3}{2} + \arctan \pi = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1 - 1}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

$x=1$ es una raíz del polinomio $2x^2 - x - 1$. Entonces, $2x^2 - x - 1 : x - 1$ exacta.
 $x=1$ es una raíz del polinomio $x^2 - 1$. Entonces, $x^2 - 1 : x - 1$ exacta.

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 2 & -1 & -1 \\ & 2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad 2x^2 - x - 1 = (x-1) \cdot (2x+1)$$

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 1 & 0 & -1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1) \cdot (2x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2} = 1.5}$$

La respuesta correcta es (C)

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Límites de funciones.

Código: ACANMA13.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2000)

El valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right]$ es:

- a) 1 b) 5 c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 1996)

El valor de $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$ Es:

- a) $2/\pi$ b) 0 c) $\pi/2$

Ejercicio nº 3.-

El límite de la función definida en el intervalo $(0, +\infty)$ $f(x) = \frac{x}{Lx}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ es:

- a) 1 b) 0 c) $+\infty$

Ejercicio nº 4.-

El límite de la función definida en el intervalo $(0, +\infty)$ $f(x) = \frac{Lx}{x}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ es:

- a) 1 b) 0 c) $+\infty$

Ejercicio nº 5.-

El límite de la función definida en el intervalo $(0, +\infty)$ $f(x) = \frac{e^x}{x}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ es:

- a) 1 b) 0 c) $+\infty$

Ejercicio nº 6.-

El límite de la función definida en el intervalo $(0, +\infty)$ $f(x) = \frac{x}{e^x}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ es:

- a) 1 b) 0 c) $+\infty$

Ejercicio nº 7.-

El límite de la función definida en el intervalo $(0, +\infty)$ $f(x) = \frac{x}{e^x}$ cuando $x \rightarrow -\infty$ es:

- a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANAMA13.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1+x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1-x} = 3 - 2 = \underline{1}$$

la respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 2.-

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \tan \frac{\pi}{2} x = (1-1) \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 \right) = 0 \cdot \tan \frac{\pi}{2} = 0 \cdot \infty = \text{indet.}$$

Resolvamos la indeterminación:

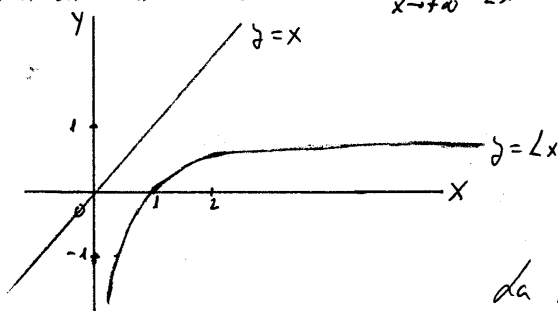
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \tan \frac{\pi}{2} x &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan \frac{\pi}{2} x - x \cdot \tan \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x - \lim_{x \rightarrow 1} (x \cdot \tan \frac{\pi}{2} x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x - \lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x = \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x - 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x - \lim_{x \rightarrow 1} \tan \frac{\pi}{2} x = \underline{0} \end{aligned}$$

la respuesta correcta es (b)

Ejercicio nº 3.-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{Lx} = \frac{+\infty}{L(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{indeterminado}$$

En este caso el valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{Lx}$ puede observarse gráficamente:



Es fácil ver que el cociente $\frac{x}{Lx}$ tiende a $+\infty$ cuando $x \rightarrow +\infty$

Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{Lx} = +\infty$$

la respuesta correcta es (c)

Ejercicio nº 4.-

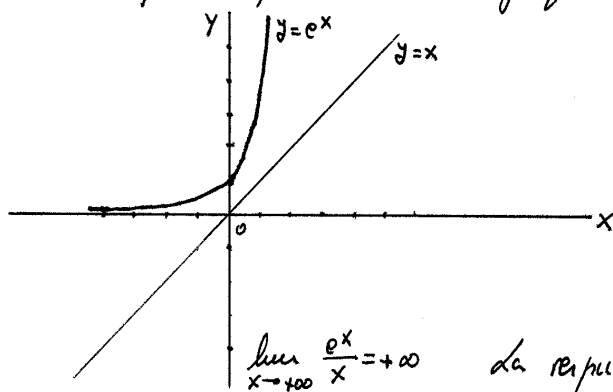
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx}{x} = \frac{L\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminado.}$$

Observando la gráfica del ejercicio anterior vemos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx}{x} = 0$
la respuesta correcta es (b)

Ejercicio nº 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^\infty}{\infty} \text{ indeterminado } \frac{\infty}{\infty}$$

Veamos que se puede resolver gráficamente:



puede apreciarse que:

$$x = +\infty \Rightarrow \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = +\infty$$

Es decir, cuando x se hace infinitamente grande, el cociente $\frac{e^x}{x}$ se hace infinitamente grande.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ la respuesta correcta es } \textcircled{C}$$

Ejercicio nº 6

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{e^\infty} = \frac{\infty}{\infty} \text{ indeterminado}$$

Utilizando la gráfica del ejercicio anterior observamos que cuando $x \rightarrow +\infty$, los cocientes $\frac{x}{e^x}$ se hacen cada vez más "pequeños" positivos ya que el numerador x es infinitamente menor que el denominador e^x .

$$\text{Por tanto: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ la respuesta correcta es } \textcircled{B}$$

Ejercicio nº 7

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{-\infty}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty}{\frac{1}{e^\infty}} = \frac{-\infty \cdot e^\infty}{1} = -\infty \cdot e^\infty = -\infty \cdot \infty = -\infty^2 = -\infty$$

$$\text{la respuesta correcta es } \textcircled{B}$$

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2001/02***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Funciones continuas

Código: ACANMA14.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2001)Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -3 \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

- a) f es continua en todo \mathbb{R} , si $a=3/2$ y $b=-3/2$
- b) f es continua en todo \mathbb{R} , si $a=-3/2$ y $b=3/2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2001)Sea la función $f(x) = \begin{cases} x + Lx & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ entonces:

- a) f no es continua en todo \mathbb{R}
- b) Existe $c \in (1, e^2)$ tal que $f(c) = \pi/2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 1996)La función $f(x) = x \cotg x$ está indeterminada en $x=0$. El valor que debe tomar f en 0 de forma que sea continua es:

- a) $f(0) = 1$
- b) $f(0) = 2$
- c) $f(0) = \pi$

Ejercicio nº 4.-La ecuación $e^x = \pi$:

- a) Tiene solución para un valor $c \in (0, 1)$
- b) Tiene solución para un valor $c \in (1, 2)$
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 5.- (propuesto en septiembre de 2002)La función polinómica $p(x) = x^7 - 7x + \lambda$ se anula en algún punto del intervalo $[0, 1]$ si:

- a) $\lambda \in (0, 6)$
- b) $\lambda \in (-\infty, -6)$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO : ACANMA14.WPD

Ejercicio nº 1

$$f(x) = \begin{cases} -3 \tan x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \tan x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Es evidente que :

$f(x) = -3 \tan x$ es continua en $(-\infty, -\frac{\pi}{2})$

$f(x) = a \tan x + b$ es continua en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$

$f(x) = \cos x$ es continua en $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$

Para que $f(x)$ sea continua en todo \mathbb{R} debe serlo en también en $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

Entonces :

$$f(x) \text{ continua en } -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} (1^\circ) f(-\frac{\pi}{2}) \text{ existe, es decir, } -\frac{\pi}{2} \in D_f \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = l \text{ (existe)} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = l = f(-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Veamos si se cumplen las condiciones :

$$(1^\circ) f(-\frac{\pi}{2}) = -3 \tan(-\frac{\pi}{2}) = -3(-1) = 3. \text{ Por tanto, } -\frac{\pi}{2} \in D_f$$

$$(2^\circ) \text{ Veamos si existe } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} (-3 \tan x) = -3 \tan(-\frac{\pi}{2}) = -3(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} (a \tan x + b) = a \tan(-\frac{\pi}{2}) + b = a(-1) + b = -a + b$$

Para que $f(x)$ tenga límite cuando $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ debe ser $-a + b = 3$

$$(3^\circ) \text{ Si } -a + b = 3 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = f(-\frac{\pi}{2})$$

Por tanto: Si $-a + b = 3$, $f(x)$ es continua en $x = -\frac{\pi}{2}$.

Analicemos la continuidad en $\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) \text{ continua en } \frac{\pi}{2} \iff \begin{cases} (1^\circ) f(\pi/2) \text{ existe, es decir, } \frac{\pi}{2} \in D_f \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = l \text{ (existe)} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = l = f(\pi/2) \end{cases}$$

Veamos si se cumplen las condiciones:

(1^o) $f(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Por tanto, $\frac{\pi}{2} \in D_f$

(2^o) Veamos si existe $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a \cdot \tan x + b) = a \cdot \tan \frac{\pi}{2} + b = a \cdot 1 + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ debe ocurrir que $a + b = 0$

(3^o) Si $a + b = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$

Por tanto: Si $a + b = 0$, la función $f(x)$ será continua en $x = \frac{\pi}{2}$

Por tanto:

• Si ocurre que $\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases}$ la función $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

Hallemos los valores de a y b

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \text{ Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.}$$

$$2b = 3 \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

$$a = -b \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

Conclusión: Si $a = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$, $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

La respuesta correcta es (b)

Ejercicio nº 2

$$f(x) = \begin{cases} x + Lx & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Conte, temos a la alternativa (a)

- $\forall x < 1$ tenemos $f(x) = x^2$ es continua por ser $f(x)$ una función polinómica.

Por tanto: $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$

- $\forall x > 1$ tenemos que $f(x) = x + Lx$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Llamando } g(x) = x, \text{ continua en } (1, +\infty) \\ h(x) = Lx, \text{ continua en } (1, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) = x + Lx \text{ es continua en } (1, +\infty)$$

Nota: La función $h(x) = Lx$ es continua en $(0, +\infty)$

Por tanto:

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Nos queda ver si es continua en $x = 1$

$$f(x) \text{ es continua en } x = 1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1^\circ) f(1) \text{ existe} \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l \text{ existe} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l = f(1) \end{array} \right.$$

Veamos si se cumplen las condiciones:

$$(1^\circ) f(1) = 1^2 = 1 \text{ (existe)}$$

$$(2^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ? \text{ debemos estudiar los límites laterales.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + Lx) = 1 + L \cdot 1 = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$(3^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$$


Es decir, $f(x)$ también es continua en $x = 1$

Conclusión: $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R}

La respuesta (a) es FALSA.

Analicemos la alternativa (b)

$$\text{¿} \exists c \in (1, e^2) \mid f(c) = \frac{\pi}{2} \text{?}$$

Consideremos el intervalo cerrado $[1, e^2]$: 

$\forall x \in [1, e^2]$ tenemos que $f(x) = x + Lx$ (incluido para $x=1$)

La pregunta es : ¿ $\exists c \in (1, e^2) \mid c + Lc - \frac{\pi}{2} = 0$?

Consideremos la función $h(x) = x + Lx - \frac{\pi}{2}$ definida en $[1, e^2]$ y apliquemos el teorema de Bolzano, es decir :

$$\left. \begin{array}{l} h : [1, e^2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto h(x) = x + Lx - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{ continua.}$$

$$\left. \begin{array}{l} h(1) = 1 + L1 - \frac{\pi}{2} = 1 + 0 - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2} = 1 - 1.57 \text{ mayor que } 1 < 0 \\ h(e^2) = e^2 + Le^2 - \frac{\pi}{2} = e^2 + 2 - \frac{\pi}{2} > 0 \text{ (evidente)} \\ \quad \quad \quad \hookrightarrow Le^2 = 2 \text{ porque } e^2 = e^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (1, e^2) \mid h(c) = 0$$

Es decir :

$$\exists c \in (1, e^2) \mid h(c) = 0$$

$$c + Lc - \frac{\pi}{2} = 0 ; \quad c + Lc = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \exists c \in (1, e^2) \mid f(c) = \frac{\pi}{2}$$

Conclusión : La respuesta correcta es (b)

Ejercicio n°3.-

$$f(x) = x \cdot \cotg x$$

$$f(x) \text{ es continua en } x=0 \iff \left\{ \begin{array}{l} (1^\circ) f(0) \text{ (existe)} \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \text{ (existe)} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l = f(0) \end{array} \right.$$

Veamos :

(1°) $f(0) = 0 \cdot \cotg 0 = \text{no existe}$ porque $\cotg 0$ no existe. Busquemos un valor para $f(0)$.

$$\begin{aligned} (2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cotg x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Asignando $f(0) = 1$ tenemos que $f(x)$ es continua en $x=0$

La respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 4.-

Consideremos la función $f(x) = e^x - \pi$

Es evidente que $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} y creciente en todo \mathbb{R} .

Consideremos el teorema de Bolzano aplicando a $f(x)$ y el intervalo $[0,1]$

$$\left. \begin{array}{l} f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = e^x - \pi \end{array} \right\} \text{continua en } [0,1] \left\{ \begin{array}{l} \text{Por ser } f(x) \text{ creciente} \\ \text{en } [0,1], \text{ podemos ase-} \\ \text{gurar que la ecuación} \\ e^x - \pi = 0 \text{ no tiene so-} \\ \text{lución en } (0,1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{l} f(0) = e^0 - \pi = 1 - \pi < 0 \\ f(1) = e^1 - \pi = 2.7... - 3.14... < 0 \end{array}$$

Es decir, $\nexists c \in (0,1) \mid e^c = \pi$

La alternativa (a) es FALSA.

Apliquemos el teorema de Bolzano al intervalo $[1,2]$

$$\left. \begin{array}{l} f: [1,2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = e^x - \pi \end{array} \right\} \text{continua en } [1,2] \left\{ \begin{array}{l} \text{Por ser } f(x) \text{ creciente en} \\ [1,2], \text{ podemos asegurar} \\ \text{que la ecuación } e^x = \pi \\ \text{tiene solución en } (1,2). \end{array} \right\} \Rightarrow$$
$$\begin{array}{l} f(1) = e^1 - \pi = e - \pi < 0 \\ f(2) = e^2 - \pi > 0 \end{array}$$

Es decir, $\exists c \in (1,2) \mid e^c = \pi$

La alternativa (b) es VERDAD.

La respuesta correcta es (b)

Ejercicio nº 5.-

$p(x) = x^7 - 7x + h \rightarrow$ función polinómica de grado 7. Por ser función polinómica es continua en todo \mathbb{R} , para todo $h \in \mathbb{R}$.

Apliquemos en el intervalo $[0,1]$ el teorema de Bolzano.

¿Habrá algún h tal que $p(0) < 0$ y $p(1) > 0$?

Es decir:

$$p(x) = x^7 - 7x + h \text{ continua en } [0,1]$$

$$\text{Si } p(0) < 0 \text{ y } p(1) > 0, \text{ entonces } \exists x \in (0,1) \mid x^7 - 7x + h = 0$$

Veamos:

$$\left. \begin{aligned} p(0) &= 0^2 - 7 \cdot 0 + \lambda \leq 0 \Rightarrow \lambda \leq 0 \\ p(1) &= 1^2 - 7 \cdot 1 + \lambda > 0 \Rightarrow -6 + \lambda > 0 \Rightarrow \lambda > 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda < 0 \text{ y } \lambda > 6 \text{ IMPOSIBLE.}$$

Es decir; No existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $p(0) < 0$ y $p(1) > 0$

Si $p(0) > 0$ y $p(1) < 0$, entonces $\exists x \in (0,1) \mid x^2 - 7x + \lambda = 0$.

Veamos:

$$\left. \begin{aligned} p(0) &= \lambda \Rightarrow \lambda > 0 \\ p(1) &= -6 + \lambda \Rightarrow -6 + \lambda < 0 \Rightarrow \lambda < 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 < \lambda < 6$$

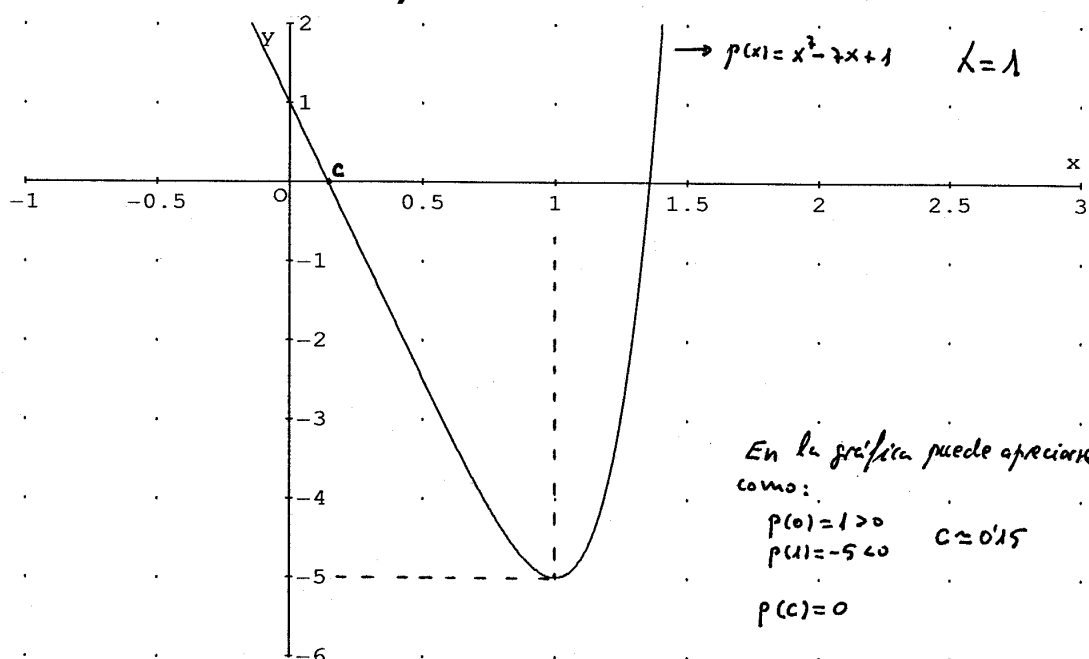
Es decir: Si $\lambda \in (0,6)$, entonces $p(0) > 0$ y $p(1) < 0$, por lo que $\exists x \in (0,1) \mid x^2 - 7x + \lambda = 0$

Comprobemos:

• para $\lambda = 1$ tenemos $p(x) = x^2 - 7x + 1$

$$\left. \begin{aligned} p: [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = x^2 - 7x + 1 \end{aligned} \right\} \text{ continua en } [0,1] \left. \begin{aligned} p(0) &= 1 > 0 \\ p(1) &= -5 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0,1) \mid p(c) = 0$$

Conclusión: La respuesta correcta es (a)



U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2002/03***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Derivada de una función en un punto. Funciones derivables Código: ACANMA15.WPD**Ejercicio nº 1.-** (propuesto en febrero de 2001)Sean f y g funciones derivables en \mathbb{R} y $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$h(x) = \frac{g(x)+1}{(g(x))^2+1} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \text{ Si } g(1) = -1, f'(0) = -1 \text{ y } g'(1) = 2, \text{ entonces la derivada}$$

de la función compuesta $f \circ h$ en el punto $x=1$ es:

- a) $(f \circ h)'(1) = -2$
- b) $(f \circ h)'(1) = 1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.-Sean las funciones $f(x) = \sqrt{2x}$ y $g(x) = Lx$. Entonces $(g \circ f)'(1)$ es igual a:

- a) $1/2$
- b) $-1/2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas

Ejercicio nº 3.-La función $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

- a) Es derivable en todo \mathbb{R}
- b) Es derivable en todo \mathbb{R} excepto en dos puntos
- c) Es derivable en todo \mathbb{R} excepto en un intervalo.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en febrero de 2002)El valor de $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right]$ es:

- a) 1
- b) 2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 5.-El límite de la función $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$ es:

- a) 0
- b) 1
- c) Ninguno de los anteriores.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA15.WPD

Ejercicio nº1.-

$$\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} f'(x) \text{ existe } \forall x \in \mathbb{R} \\ f'(0) = -1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} g'(x) \text{ existe } \forall x \in \mathbb{R} \\ g(1) = -1 ; g'(1) = 2 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow h(x) = \frac{g(x)+1}{[g(x)]^2+1} \end{array} \right\} \text{Llamaremos } z = h(x) ; z' = \frac{dz}{dx} = h'(x)$$

Buscamos el valor de $(f \circ h)'(1)$

Veamos:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(z)$$

$$(f \circ h)'(x) = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot h'(x)$$

$$\text{Para } x=1 \text{ en } h(1) = \frac{g(1)+1}{[g(1)]^2+1} = \frac{-1+1}{(-1)^2+1} = \frac{0}{2} = 0 \quad z = h(1) = 0$$

$$h'(x) = \frac{g'(x) \cdot [g(x)]^2 + 1 - 2 \cdot g(x) \cdot g'(x) \cdot [g(x)+1]}{[g(x)]^2 + 1}^2$$

$$\begin{aligned} h'(1) &= \frac{g'(1) \cdot [g(1)]^2 + 1 - 2 \cdot g(1) \cdot g'(1) \cdot [g(1)+1]}{[g(1)]^2 + 1}^2 = \frac{2 \cdot [1+1] - 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1+1)}{(1+1)^2} = \\ &= \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$(f \circ h)'(1) = f'(0) \cdot h'(1) = -1 \cdot 1 = -1$$

Por tanto: $\boxed{(f \circ h)'(1) = -1}$

Conclusión: La alternativa correcta es **(c)**

Ejercicio nº 2.-

$$\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \sqrt{2x} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x) = Lx \end{array} \right\}$$

Construyamos la función composición $g \circ f$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{2x}) = L\sqrt{2x} = h(x)$$

Derivemos la función $h(x) = (g \circ f)'(x) = L\sqrt{2x}$

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{(\sqrt{2x})^2} = \frac{1}{2x}$$

Para $x=1$ en $h'(1) = (g \circ f)'(1) = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$

Por tanto: $\boxed{(g \circ f)'(1) = \frac{1}{2}}$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$ vamos a expresarla como una función de los por intervalos.

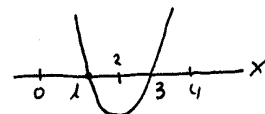
Consideremos la función $y = g(x) = x^2 - 4x + 3$. Se trata de una parábola del tipo \cup .

Veamos si corta al eje de abscisas:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

La función $y = g(x)$ corta al eje de abscisas en $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$

Esto significa que la gráfica de $y = g(x)$ es:



Esto significa que la gráfica de $f(x) = |g(x)| = |x^2 - 4x + 3|$ es:



Ya podemos definir la función $f(x)$ por intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Notese que $f(1) = 0$ y $f(3) = 0$

Es evidente que:

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= 2x - 4 & \forall x \in (-\infty, 1) \\ f'(x) &= -2x + 4 & \forall x \in (1, 3) \\ f'(x) &= 2x - 4 & \forall x \in (3, +\infty) \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ es derivable en } (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$$

Nos preguntamos: ¿Es $f(x)$ derivable en $x=1$?

¿Es $f(x)$ derivable en $x=3$?

Veamos:

→ En $x=1$

Halleamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{aligned} f'_-(1) &= 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2 \\ f'_+(1) &= -2 \cdot 1 + 4 = -2 + 4 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists f'(1). \text{ La función } f(x) \text{ no es derivable en } x=1$$

→ En $x=3$

Halleamos las derivadas laterales:

$$\left. \begin{aligned} f'_-(3) &= -2 \cdot 3 + 4 = -6 + 4 = -2 \\ f'_+(3) &= 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists f'(3). \text{ La función } f(x) \text{ no es derivable en } x=3$$

Por tanto: La función $f(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} excepto en los puntos $x=1$ y $x=3$

conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 4.-

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\frac{1}{x}} \right] = \frac{1}{1-1} - \frac{1}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \text{Indeterminado.}$$

Operemos en el interior del corchete:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot Lx - x + 1}{(x-1) \cdot Lx} = \frac{1 \cdot L1 - 1 + 1}{(1-1) \cdot L1} = \frac{1 \cdot 0 - 1 + 1}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{INDEF}$$

Se cumplen las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot Lx - x + 1}{(x-1) \cdot Lx} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \cdot Lx - x + 1)'}{[(x-1) \cdot Lx]'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{1 \cdot Lx + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{Lx + 1 - 1}{\frac{x \cdot Lx + x - 1}{x}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot Lx}{x \cdot Lx + x - 1} = \frac{1 \cdot L1}{1 \cdot L1 + 1 - 1} = \frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 0 + 0} = \frac{0}{0} = \text{INDEF.}$$

Aplicamos nuevamente L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot Lx}{x \cdot Lx + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \cdot Lx)'}{(x \cdot Lx + x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x}}{1 \cdot Lx + x \cdot \frac{1}{x} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{Lx + 1}{Lx + 1 + 1} = \frac{L1 + 1}{L1 + 1 + 1} = \frac{0 + 1}{0 + 2} = \frac{1}{2} = 0'5 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{Lx} \right] = \frac{1}{2} = 0'5}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (C)

Ejercicio nº 5.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \frac{\text{sen } 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Se cumplen las condiciones para aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{sen } x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Es decir: $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1}$

Conclusión: La alternativa correcta es (b)

U.N. E.D (Ceuta)*Curso escolar 2001/02***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Derivada de una función en un punto. Funciones derivables Código: ACANMA16.WPD**Ejercicio nº 1.-** (propuesto en septiembre de 2001)La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- a) Es derivable en $x=0$ y $f'(0)=1$
- b) Es derivable en $x=-1$ y $f'(-1)=-2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2001)El valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} nx - n \operatorname{tg} x}{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx}$ es:

- a) 2
- b) -2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

Halla el límite de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{e^x}}{Lx}$ cuando x tiende a $+\infty$ y cuando x tiende a $-\infty$
- b) $g(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{e^{2x} - 1}$ cuando x tiende a 0.
- c) $h(x) = \frac{\operatorname{sen} nx}{x}$ $n \in \mathbb{N}$ cuando x tiende a 0.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 1997)El valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$ es:

- a) 3
- b) menor que 2
- c) Ninguno de los anteriores.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA16.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} -2x-1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Analizamos la alternativa a):

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=0$ es necesario que sea continua en $x=0$

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=0$

$$f(x) \text{ continua en } x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) f(0) \text{ existe} \\ (ii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existe} \\ (iii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \end{cases}$$

$$(i) f(0) = \cos 0 = 1 \Rightarrow f(0) \text{ existe.}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{debemos hallar los límites laterales en } x=0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x = \cos 0 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ no existe.}$$

Es decir, $f(x)$ no es continua en $x=0$.

Por tanto, la alternativa (a) es FALSA

Analizamos la alternativa b).

Veamos si $f(x)$ es continua en $x=-1$

$$f(x) \text{ es continua en } x=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} (i) f(-1) \text{ existe} \\ (ii) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ existe} \\ (iii) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \end{cases}$$

$$(i) f(-1) = -2(-1)-1 = 2-1 = 1 \Rightarrow f(-1) \text{ existe.}$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ debemos hallar los límites laterales en } x=-1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = (-1)^2 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2x-1) = -2(-1)-1 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1 = f(-1) \quad (iii)$$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $x=-1$. Puede ser derivable en $x=-1$.

Hallemos $f'(x)$ en $x=-1$, es decir, $f'(-1)$

Debemos hallar las derivadas laterales:

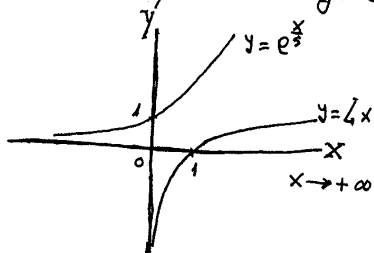
$$f'(-1^-) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2x-1-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-2) = -2$$

La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{e^x}}{Lx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{5}}}{Lx} = \frac{e^{\frac{+\infty}{5}}}{L(+\infty)} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} = \text{Indeterminado}$$

A simple vista podemos asegurar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{5}}}{Lx} = +\infty$ ya que las gráficas de las funciones $y = e^{\frac{x}{5}}$ e $y = Lx$ son:



puede apreciarse que cuando $x \rightarrow +\infty$ el cociente $\frac{e^{\frac{x}{5}}}{Lx}$ tiende a $+\infty$.

No obstante aplicaremos la regla de L'Hôpital, puesto que las funciones $y = e^{\frac{x}{5}}$ e $y = Lx$ son derivables en el intervalo $(0, +\infty)$.

Veamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{5}}}{Lx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^{\frac{x}{5}})'}{(Lx)'} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5} \times e^{\frac{x}{5}} \right) = \frac{1}{5} \infty e^{\frac{\infty}{5}} = \underline{\underline{+\infty}}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

Veamos el límite cuando $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{x}{5}}}{Lx} = \frac{e^{-\infty/5}}{L(-\infty)} = \frac{0}{-\infty} = \text{No Existe}$$

↳ Recuerdese que la función $y = Lx$ no está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \text{No existe}}$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{e^{2x} - 1} = \frac{\tan 0}{e^0 - 1} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Observamos que las funciones $y = \tan x$ e $y = e^{2x} - 1$ son derivables en un entorno de $x = 0$, por lo que es posible aplicar L'Hôpital.

Veamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(e^{2x} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2e^{2x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 0}}{2e^0} = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} = \underline{\underline{0.5}}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2} = 0.5$$

Comprobemos con calculadora:

$$x = 0.001 \text{ radianes} \rightarrow g(0.001) = 0.49950033 \dots \approx 0.5$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x} = \frac{\sin(n \cdot 0)}{0} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Como las funciones $y = \sin nx$ e $y = x$ son derivables en $x=0$, podemos aplicar L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin nx)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n \cdot \cos nx}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} n \cdot \cos nx = n \cdot \cos 0 = n$$

$\hookrightarrow \cos 0 = 1$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = n$$

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2001)

El polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de la función $f(x) = \frac{Lx}{x^2}$ en el punto $x=1$ es:

- a) $P_2(x) = (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2$
- b) $P_2(x) = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2001)

Sea $f(x) = \frac{Lx}{x}$ para $x>0$. El polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de $f(x)$ en el punto $x=1$ es:

- a) $P_2(x) = (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2$
- b) $P_2(x) = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$
- c) Ninguna de las anteriores repuestas.

Ejercicio nº 3.-

Sea la función $f(x) = e^x$ y $P_2(x)$ el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de la función $f(x)$ en el punto $a=0$. Entonces, el valor del resto de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $a=0$ para $x=1$:

- a) Es mayor que 0
- b) Es menor que 0
- c) Es igual a 0.

Ejercicio nº 4.-

Sea $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ y $P_3(x)$ el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3, de la función $f(x)$ en un punto cualquiera a . Si b es otro número real cualquiera, entonces la diferencia $f(x) - P_3(x)$:

- a) En unos casos será positiva, en otros negativa y en otros igual a cero, depende del número b .
- b) Únicamente es cero si $a=b$
- c) Es cero para cualquier valor de b .

SOLUCIONES

CÓDIGOS
ACANMA17.WPD

Ejercicio n°1.-

$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ función continua y derivable en $(0, +\infty)$

Halleamos el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de $f(x)$ en el punto $x=1$:

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1^2} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} ; f'(x) = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} ; f'(1) = \frac{1 - 2 \cdot 1 \cdot 0}{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{(1 - 2 \cdot \ln x - 2x \cdot \frac{1}{x}) \cdot x^4 - 4x^3 \cdot (x - 2x \cdot \ln x)}{x^8}$$

$$f''(1) = \frac{(1 - 2 \cdot 0 - 2) \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot (1 - 2 \cdot 1 \cdot 0)}{1^8} = \frac{-1 - 4}{1} = -5$$

Entonces:

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{5}{2!}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2$$

Conclusión: la respuesta correcta es (C)

Ejercicio n°2.-

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ si } x > 0$$

Halleamos el polinomio de Taylor de $f(x)$, de grado menor o igual que 2 en el punto $x=1$:

$$P_2(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(1) = \frac{\ln 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} ; f'(1) = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} ; f''(1) = \frac{-1 - 2 \cdot 1 \cdot (1 - 0)}{1^4} = -3$$

Entonces:

$$P_2(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{3}{2!}(x-1)^2 = (x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$$

Conclusión: la respuesta correcta es (b)

Ejercicio n: 3.-

$$f(x) = e^x$$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f'(x) = e^x ; f'(0) = e^0 = 1$$

$$f''(x) = e^x ; f''(0) = e^0 = 1$$

$$\text{Entonces: } P_2(x) = 1 + \frac{1}{1}x + \frac{1}{2}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Sabemos que:

$$\text{Resto de Taylor} = E_2(x) = f(x) - P_2(x)$$

$$\text{Para } x=1 \text{ es } E_2(1) = f(1) - P_2(1) = e^1 - \left[1 + 1 + \frac{1}{2}\right] = e - 2.5 \geq 0$$

$$\text{Es decir: } E_2(1) = 2.718281... - 2.5 > 0$$

Conclusión: la respuesta correcta es (a)

Ejercicio n: 4.-

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ función polinómica de grado 3

$P_3(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$ polinomio de Taylor de grado menor o igual que 3, de la función $f(x)$ en $x=a$

Pues bien: $P_3(x)$ es una función polinómica de grado 3

$$P_3(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por tanto: } f(x) - P_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Conclusión: La respuesta correcta: (c)

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2001/02

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Fórmula de Taylor. Aplicaciones de la fórmula de Taylor

Código: ACANMA18.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2001)

La función $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \operatorname{sen} x}$:

- a) Tiene un mínimo relativo en $x = -\pi/2$ y es creciente en el intervalo $[0, \pi/2]$
- b) Tiene un máximo relativo en $x = \pi/2$ y es creciente en el intervalo $[\pi/2, \pi]$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2001)

Sea la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para todo $x \in (-1, 1)$. La ecuación de la tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es:

- a) $y = x - \sqrt{2}$
- b) $y = -x + \sqrt{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2001)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función con derivada tercera en $x=0$, cuyo polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 en $x=0$ es $P_2(x) = 1 + x + 3x^2$. El polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de la función $g(x) = \operatorname{sen}(f(x) - 1)$ en $x=0$ es:

- a) $x + 6x^2$
- b) $x - 3x^2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 2001)

La ecuación $x + \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$:

- a) Tiene una raíz en $[-\pi, 0]$
- b) Posee una única raíz en $[-\pi, \pi/2]$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 5.- (propuesto en septiembre de 2000)

Si $f(x) = L(1+x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, el polinomio de Taylor de grado menor o igual que tres de la función f en el punto $x=0$ es:

- a) $x^2 + \frac{1}{6}x^3$
- b) x^2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA18.WPD

Ejercicio nº1.-

$$f(x) = \frac{\sec x}{2 + \sec x}$$

Veamos si en $x = -\frac{\pi}{2}$ hay un mínimo relativo.

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (2 + \sec x) - \sec x \cdot \sec x}{(2 + \sec x)^2} = \frac{2 \cdot \cos x + \cos x \cdot \sec x - \sec x \cdot \sec x}{(2 + \sec x)^2} = \frac{2 \cdot \cos x}{(2 + \sec x)^2}$$

$$f'(-\frac{\pi}{2}) = \frac{2 \cdot \cos(-\frac{\pi}{2})}{[2 + \sec(-\frac{\pi}{2})]^2} = \frac{2 \cdot 0}{(2 - 1)^2} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \text{En } x = -\frac{\pi}{2} \text{ puede haber } \begin{cases} \text{MÁXIMO} \\ \text{MÍNIMO} \end{cases}$$

$$\text{Hallamos } f''(x) = \frac{-2 \sec x \cdot (2 + \sec x)^2 - 2(2 + \sec x) \cdot \cos x \cdot 2 \cdot \cos x}{(2 + \sec x)^4}$$

$$\begin{aligned} f''(-\frac{\pi}{2}) &= \frac{-2 \cdot \sec(-\frac{\pi}{2}) \cdot [2 + \sec(-\frac{\pi}{2})]^2 - 2 \cdot [2 + \sec(-\frac{\pi}{2})] \cdot \cos(-\frac{\pi}{2}) \cdot 2 \cdot \cos(-\frac{\pi}{2})}{[2 + \sec(-\frac{\pi}{2})]^4} = \\ &= \frac{-2 \cdot (-1) \cdot (2 - 1)^2 - 2 \cdot (2 - 1) \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0}{(2 - 1)^4} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \end{aligned}$$

En $x = -\frac{\pi}{2}$ hay un mínimo relativo

Veamos si es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{(2 + \sec x)^2} > 0 \Leftrightarrow \text{Como el denominador siempre es positivo: } 2 \cdot \cos x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow \dots x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] ; x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; x \in [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] ; \dots$$

Como en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\cos x > 0$, entonces $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ es creciente en $[0, \frac{\pi}{2}]$

Conclusión: La respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº2.-

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in (-1, 1)$$

$P(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es un punto de la gráfica de f ya que $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{1 - (\frac{1}{\sqrt{2}})^2} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sea r la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
 Sabemos que la ecuación de r es: $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = m_r(x - \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\rightarrow m_r = f'(\frac{1}{\sqrt{2}})$$

Tenemos que hallar $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} ; \quad f'(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$$

Por tanto: $r: y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -1 \cdot (x - \frac{1}{\sqrt{2}})$

$$y = -x + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad y = -x + \frac{2}{\sqrt{2}} ; \quad y = -x + \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

Conclusión: $r: \boxed{y = -x + \sqrt{2}} \rightarrow$ la respuesta correcta es (6)

Ejercicio nº 3.-

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$ existen.

$P_2(x) = 1 + x + 3x^2$ Polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 en $x=0$ de la función f .

$g(x) = \sin(f(x)-1)$ otra función.

llamemos $G_2(x)$ = Polinomio de Taylor de grado menor o igual que 2 de la función $g(x)$ en el punto $x=0$

$$G_2(x) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}x + \frac{g''(0)}{2!}x^2$$

$$P_2(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + 3x^2 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 6 \end{cases}$$

Entonces:

$$g(0) = \sin(f(0)-1) = \sin(1-1) = \sin 0 = 0$$

$$g'(x) = \cos(f(x)-1) \cdot f'(x) ; \quad g'(0) = \cos(f(0)-1) \cdot f'(0) = \cos(1-1) \cdot 1 = \cos 0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$g''(x) = -\sin(f(x)-1) \cdot f'(x) \cdot f'(x) + \cos(f(x)-1) \cdot f''(x)$$

$$g''(0) = -\sin(f(0)-1) \cdot f'(0) \cdot f'(0) + \cos(f(0)-1) \cdot f''(0) = -\sin 0 \cdot 1 \cdot 1 + \cos 0 \cdot 6 = 6$$

Entonces:

$$G_2(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{6}{2!}x^2 = x + 3x^2 \quad \text{no coincide ni con (a) ni con (b)}$$

Conclusión: La respuesta correcta es (c)

Ejercicio nº 4.-

$$x + \tan x = \frac{\pi}{2} \text{ ecuación}$$

$$x + \tan x - \frac{\pi}{2} = 0 \text{ ecuación. Consideremos la función } f(x) = x + \tan x - \frac{\pi}{2}$$

$f(x) = x + \tan x - \frac{\pi}{2}$ es continua en todo \mathbb{R}

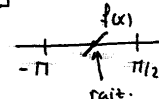
Veamos si es cierto el apartado (b).

Para ello comprobamos si verifica el teorema de Bolzano en $[-\pi, \pi/2]$

$$f: [-\pi, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua}$$

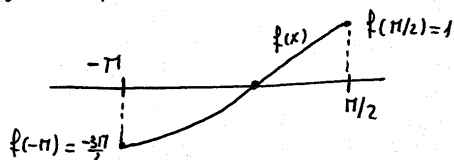
$$\left. \begin{aligned} f(-\pi) &= -\pi + \tan(-\pi) - \frac{\pi}{2} = -\pi + 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} < 0 \\ f(\pi/2) &= \frac{\pi}{2} + \tan \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 1 > 0 \end{aligned} \right\} \text{ signo } f(-\pi) \neq \text{ signo } f(\pi/2)$$

Por tanto: f verifica el teorema de Bolzano en $[-\pi, \pi/2]$

Entonces, f tiene una raíz en dicho intervalo: 

¿Esa raíz! ¿Es única?

Si demostramos que $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\pi, \pi/2)$, podemos asegurar que dicha raíz es única, ya que:



Veamos si $f'(x) > 0$ en todo $(-\pi, \pi/2)$:

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

Evidentemente $\forall x \in (-\pi, \pi/2)$ es $f'(x) = 1 + \cos x > 0$

Por tanto: $f(x)$ es estrictamente creciente en $[-\pi, \pi/2]$ y posee una raíz única en dicho intervalo.

Conclusión: La respuesta correcta es (b)

Ejercicio nº 5.-

$$f(x) = \mathcal{L}(1+x^2) \quad ; \quad \text{Para } x=0 \Rightarrow f(0) = \mathcal{L}(1+0^2) = \mathcal{L}1 = 0$$

$$P_3(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3$$

La función derivada de f por las derivadas sucesivas son:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2} \quad ; \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \quad ; \quad f''(0) = 2$$

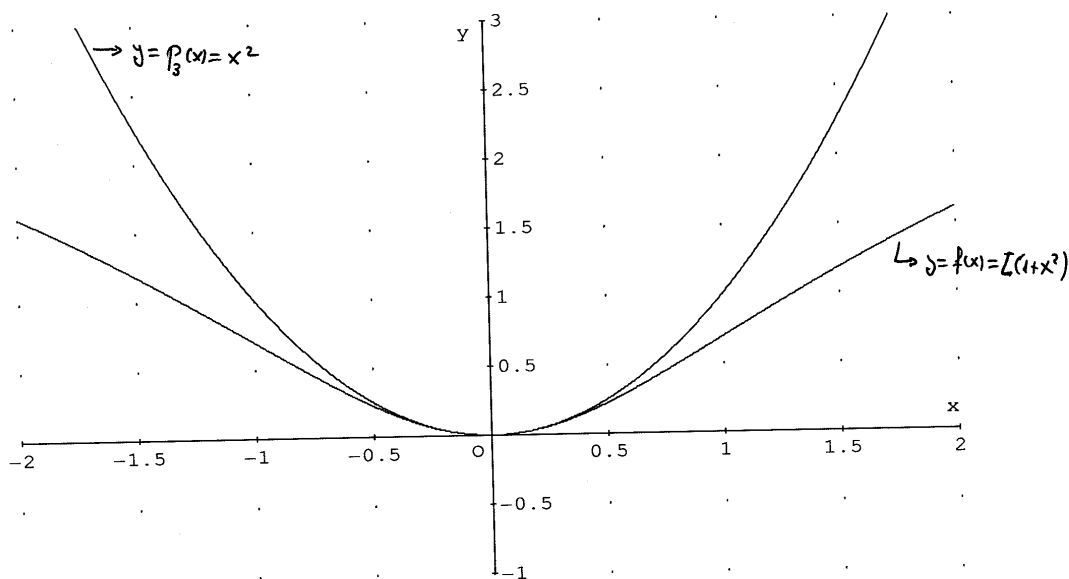
$$f'''(x) = \frac{-4x \cdot (1+x^2)^2 - 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} \quad ; \quad f'''(0) = 0$$

Entonces:

$$P_3(x) = 0 + \frac{0}{1}x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{0}{6}x^3 = x^2 \quad ; \quad \boxed{P_3(x) = x^2}$$

Por tanto: La alternativa correcta es **(6)**

Disenjemos las gráficas de $f(x) = \mathcal{L}(1+x^2)$ y de $P_3(x) = x^2$ en las proximidades de $x=0$



Puede apreciarse como en las proximidades de $x=0$ ambas gráficas son casi coincidentes, es decir:

$$\text{Para } x \approx 0 \text{ ocurre que } f(x) = \mathcal{L}(1+x^2) \approx x^2 = P_3(x)$$

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 1996)

La función $f(x) = \sin^2 x$ para $x \in [0, 2\pi]$ verifica:

- a) Posee un máximo relativo en $x=\pi/2$ y un mínimo relativo en $x=\pi$
- b) No posee puntos de inflexión.
- c) Posee un máximo relativo en $x=3\pi/2$ y un mínimo relativo en $x=\pi/2$

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 1996)

La función $f(x) = \sin^2 x$ para $x \in [0, 2\pi]$ verifica:

- a) Es constante en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$
- b) Es cóncava en el intervalo $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$
- c) Es convexa en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Ejercicio nº 3.- (propuesto en febrero de 1996)

La función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$ verifica:

- a) Es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
- b) Es monótona creciente en todo su dominio de definición.
- c) Es creciente en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 1996)

Sea $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ definida en \mathbb{R} . Decir cuál de las siguientes afirmaciones es falsa:

- a) f es par ($f(x) = f(-x)$ para todo x real).
- b) f tiene un mínimo en $x=0$
- c) f tiene una asíntota oblicua.

Ejercicio nº 5.- (propuesto en septiembre de 1996)

Sea $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces:

- a) f puede tener una asíntota vertical.
- b) f es siempre derivable en $[0,1]$
- c) Los apartados anteriores son falsos.

Ejercicio nº 6.- (propuesto en septiembre de 1996)

Una asíntota de la gráfica de la función $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ es la recta de ecuación:

- a) $y = 2x$
- b) $y = 2x - 1$
- c) $y = 2x + 1$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANM19.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f(x) = \sec^2 x \quad \text{para } x \in [0, 2\pi]$$

Hallamos sus extremos:

$$f'(x) = 2 \cdot \sec x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \sec x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } \sec x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \pi \\ x_3 = 2\pi \end{cases} \\ \text{o bien } \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_4 = \frac{\pi}{2} \\ x_5 = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$f''(x) = 2 \cdot (\cos x \cdot \cos x + \sec x \cdot (-\sec x)) = 2 \cdot (\cos^2 x - \sec^2 x)$$

$$\text{para } x=0 \Rightarrow f''(0) = 2 \cdot (\cos^2 0 - \sec^2 0) = 2 \cdot (1 - 0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{En } x=0 \text{ hay mínimo}$$

$$\text{para } x=\pi \Rightarrow f''(\pi) = 2 \cdot (\cos^2 \pi - \sec^2 \pi) = 2 \cdot (1 - 0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{En } x=\pi \text{ hay mínimo}$$

$$\text{para } x=2\pi \Rightarrow f''(2\pi) = 2 \cdot (\cos^2 2\pi - \sec^2 2\pi) = 2 \cdot (1 - 0) = 2 > 0 \Rightarrow \text{En } x=2\pi \text{ hay mínimo}$$

$$\text{para } x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f''(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot (\cos^2 \frac{\pi}{2} - \sec^2 \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot (0 - 1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{En } x=\frac{\pi}{2} \text{ hay máximo}$$

$$\text{para } x=\frac{3\pi}{2} \Rightarrow f''(\frac{3\pi}{2}) = 2 \cdot (\cos^2 \frac{3\pi}{2} - \sec^2 \frac{3\pi}{2}) = 2 \cdot (0 - 1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{En } x=\frac{3\pi}{2} \text{ hay máximo}$$

Hay un máximo relativo en $x=\frac{\pi}{2}$ y un mínimo relativo en $x=\pi$

Conclusión: la respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = \sec^2 x \quad \text{para } x \in [0, 2\pi]$$

Contestemos al apartado (a): ¿Es $f(x)$ constante en $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$? Veamos:

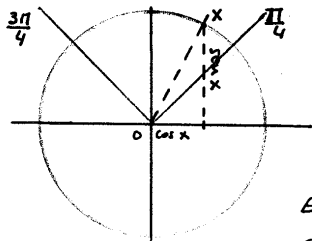
$$\left. \begin{aligned} f(\frac{\pi}{2}) &= \sec^2 \frac{\pi}{2} = 1^2 = 1 & \frac{\pi}{2} &\in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ f(\frac{3\pi}{2}) &= \sec^2 \frac{3\pi}{2} = (-1)^2 = 1 & \frac{3\pi}{2} &\in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ f(\pi) &= \sec^2 \pi = 0^2 = 0 & \pi &\in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ no es constante en } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

(a) es FALSO

Contestemos al apartado (b)

$f(x)$ es cóncava en los puntos x donde $f''(x) < 0$

$$f''(x) = 2 \cdot (\cos^2 x - \sec^2 x) < 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sec^2 x < 0 \Rightarrow \cos^2 x < \sec^2 x$$



Notense que:

- para $x = \frac{\pi}{4}$ es $\sec \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\sec^2 \frac{\pi}{4} = \cos^2 \frac{\pi}{4}$
- para $x = \frac{3\pi}{4}$ es $\sec \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = -\cos \frac{3\pi}{4}$ y $\sec^2 \frac{3\pi}{4} = \cos^2 \frac{3\pi}{4}$
- para $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ es $\cos^2 x < \sec^2 x$

Entonces: $\forall x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ es $f''(x) < 0$

Conclusión: la respuesta correcta es (b)

Hagamos otro razonamiento pensando en que el examen es tipo test y una de las tres alternativas es correcta.

• Queda claro que (a) es falso.

• Veamos si (b) es cierto:

Considero un $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$. Por ejemplo $\frac{\pi}{2} \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

$$f''(\frac{\pi}{2}) = 2 \cdot (\cos^2 \frac{\pi}{2} - \sec^2 \frac{\pi}{2}) = 2 \cdot (0 - 1) = -2 < 0 \Rightarrow \text{En } x = \frac{\pi}{2} \text{ } f(x) \text{ es cóncava.}$$

¿Debo pensar que $f(x)$ es cóncava en todo $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$?

No tiene por qué serlo, pero es probable que sí.

• Veamos si (c) es cierto:

Considero un $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Por ejemplo $x = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$$f''(\frac{2\pi}{3}) = 2 \cdot (\cos^2 \frac{2\pi}{3} - \sec^2 \frac{2\pi}{3}) = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \right] = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} = -1 < 0$$

Es decir, $f(x)$ es cóncava en $x = \frac{2\pi}{3} \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, por lo que podemos decir que no es cóncava en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Esto significa que no es cóncava en $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

Conclusión: Por eliminación aceptamos (b) como correcta.

Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$$

Veamos donde es decreciente.

$f(x)$ es decreciente en los puntos x donde $f'(x) < 0$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3 - (2x - 4) \cdot x}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Veamos donde $f'(x) \leq 0$

$$\frac{-x^2 + 3}{(x^2 - 4x + 3)^2} < 0 \Leftrightarrow -x^2 + 3 < 0 \Leftrightarrow 3 - x^2 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + x) \cdot (\sqrt{3} - x) < 0$$

$$(\sqrt{3} + x) \cdot (\sqrt{3} - x) < 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } \begin{cases} \sqrt{3} + x > 0 \Rightarrow x > -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - x < 0 \Rightarrow x > \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x > \sqrt{3}} \text{ } f \text{ decreciente} \\ \text{o bien } \begin{cases} \sqrt{3} + x < 0 \Rightarrow x < -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} - x > 0 \Rightarrow x < \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x < -\sqrt{3}} \text{ } f \text{ decreciente.} \end{cases}$$

f es decreciente si $x < -\sqrt{3}$ o si $x > \sqrt{3}$

f es decreciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Conclusión: la respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ definida en } \mathbb{R}$$

Contestemos al apartado (a).

$$f(x) \text{ es par} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \forall x \in D_f, \text{ entonces } -x \in D_f. \\ (2) f(-x) = f(x) \end{cases}$$

(1) Como $D_f = \mathbb{R}$, entonces $\forall x \in D_f$, es $-x \in D_f$

$$(2) f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$$

↳ propiedad conmutativa de suma en \mathbb{R}

Conclusión: La respuesta correcta es (a)

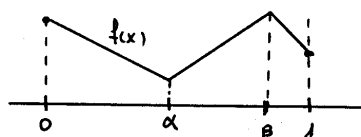
Ejercicio nº 5.-

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ función continua en $[0, 1]$. Esto significa que $f(x)$ es continua en $(0, 1) \subset [0, 1]$. Además es continua en 0 por su derecha y continua en 1 por su izquierda.

Esto significa que $f(x)$ existe para todo $x \in [0, 1]$ y por tanto no puede haber un $\alpha \in [0, 1]$ en el cual haya una asíntota vertical, ya que ello respondería que $f(x)$ es discontinua en $\alpha \in [0, 1]$.

Por tanto: (a) es FALSO

f puede ser continua en $[0, 1]$ y no ser derivable en algún punto de $[0, 1]$. Por ejemplo: ...



f no es derivable ni en α ni en β

Por tanto: (b) es FALSO

Como (a) y (b) son FALSOS, la respuesta correcta es (c)

U.N.D.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2001/02

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Fórmula de Taylor. Aplicaciones de la fórmula de Taylor

Código: ACANMA20.WPD

Ejercicio nº 1.-

Dada la función $f(x) = 5x^5$, entonces:

- a) En $x=0$ hay un extremo.
- b) En $x=0$ hay una inflexión.
- c) Ninguno de los apartados anteriores es cierto.

Ejercicio nº 2.-

Dada la función $f(x) = 2(x-2)^4$, entonces:

- a) En $x=2$ hay un extremo.
- b) En $x=2$ hay una inflexión.
- c) Ninguno de los apartados anteriores es cierto.

Ejercicio nº 3.-

Hallar las asíntotas oblicuas de la función $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

Ejercicio nº 4.-

Estudia los extremos, concavidad, convexidad y puntos de inflexión de $f(x) = x \cdot e^x$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANM20.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f(x) = 5x^5 \quad \text{¿qué ocurre en } x=0?$$

$$f'(x) = 25x^4$$

para $x=0$ tenemos que $f'(0) = 25 \cdot 0^4 = 0 \Rightarrow$ Puede haber extremo o punto de inflexión.

$$f''(x) = 100x^3$$

para $x=0$ tenemos que $f''(0) = 100 \cdot 0^3 = 0 \Rightarrow$ No podemos decidir.

$$f'''(x) = 300x^2$$

para $x=0$ tenemos que $f'''(0) = 300 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow$ No podemos decidir.

$$f^{(iv)}(x) = 600x$$

para $x=0$ tenemos que $f^{(iv)}(0) = 600 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ No podemos decidir.

$$f^{(v)}(x) = 600$$

para $x=0$ tenemos que $f^{(v)}(0) = 600 \neq 0 \Rightarrow$ Sí podemos decidir.

• En $x=0$ es $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(iv)}(0) = 0$
 $f^{(v)}(0) \neq 0 \} \Rightarrow$ En $x=0$ hay inflexión

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 2

$$f(x) = 2(x-2)^4 \quad \text{¿qué ocurre en } x=2?$$

$$f'(x) = 8(x-2)^3$$

para $x=2$ tenemos que $f'(2) = 8 \cdot (2-2)^3 = 8 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ Puede haber extremo o punto de inflexión.

$$f''(x) = 24(x-2)^2$$

para $x=2$ tenemos que $f''(2) = 24 \cdot (2-2)^2 = 24 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ No podemos decidir.

$$f'''(x) = 48(x-2)$$

para $x=2$ tenemos que $f'''(2) = 48 \cdot (2-2) = 48 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ No podemos decidir.

$$f^{(iv)}(x) = 48$$

para $x=2$ tenemos que $f^{(iv)}(2)=48 \neq 0$ ($48 > 0$) \Rightarrow Podemos decidir.

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ En } x=2 \text{ tenemos } f'(2)=f''(2)=f'''(2)=0 \\ f^{(iv)}(2)=48 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{En } x=2 \text{ hay MINIMO}}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

U.N.D.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2001/02

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Series numéricas

Código: ACANMA21.WPD

Ejercicio nº 1.-

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n}$ es :

- a) Convergente
- b) Divergente
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 2.-

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ es:

- a) Convergente
- b) Divergente
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 3.-

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{-n+1}{n}$ es:

- a) Convergente
- b) Divergente
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 4.-

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ es:

- a) Convergente
- b) Divergente
- c) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIONES

CÓDIGO
ACANMA21.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n} = e^{-1} + 2 \cdot e^{-2} + 3 \cdot e^{-3} + 4 \cdot e^{-4} + \dots$$

Aplicaremos el criterio de la integral:

- Consideremos la función $f: [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longrightarrow f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$

- La función $f(x) = \frac{x}{e^x}$ es positiva en todo $x \in [1, +\infty)$.

$$\forall x \in [1, +\infty) \text{ es } f(x) = \frac{x}{e^x} \geq 0$$

- Veamos si es decreciente en todo $x \in [1, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot e^x - e^x \cdot x}{(e^x)^2} = \frac{e^x \cdot (1-x)}{e^x \cdot e^x} = \frac{1-x}{e^x} < 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

Por tanto, $f(x) = \frac{x}{e^x}$ es decreciente en todo el intervalo $[1, +\infty)$.

- La función $f(x) = x \cdot e^{-x}$ es integrable.

$$I = \int x \cdot e^{-x} dx = (*)$$

$$\text{Por partes, tomamos } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{cases}$$

$$(*) : I = \int u dv = u \cdot v - \int v du = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = e^{-x} \cdot [-x-1]$$

- Consideremos la integral impropia $J = \int_1^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$

Dicha integral tiene el mismo carácter que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-n} = X$

- Veamos el carácter de la integral J :

$$\begin{aligned} J &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x \cdot e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[e^{-x} \cdot (-x-1) \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-x-1}{e^x} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-b-1}{e^b} - \frac{-1-1}{e^1} \right] = \frac{-\infty-1}{e^{\infty}} - \frac{-2}{e} = 0 + \frac{2}{e} = \frac{2}{e} \end{aligned}$$

- Concluimos: La integral es convergente y la serie también lo es.
La respuesta correcta es (a)

Ejercicio n° 2.-

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

Término n -ésimo $u_n = \frac{1}{n^n}$

Se trata de una serie de términos positivos.

Para estudiar su convergencia o divergencia vamos a utilizar el criterio de comparación.

Veamos:

- Consideremos la serie $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$

Observamos que T es una serie del tipo $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha = 2 > 1$, es decir, una serie armónica generalizada con $\alpha > 1$.

- Sabemos que las series del tipo $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha > 1$ son convergentes.

Por tanto, $T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

- Compararemos la serie dada S con la serie T .

$$\underline{S = \sum \frac{1}{n^n}} \quad \underline{T = \sum \frac{1}{n^2}}$$

$$u_1 = \frac{1}{1^1} = 1 \leq v_1 = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$u_2 = \frac{1}{2^2} \leq v_2 = \frac{1}{2^2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3^3} \leq v_3 = \frac{1}{3^2}$$

$$u_4 = \frac{1}{4^4} \leq v_4 = \frac{1}{4^2}$$

$$u_n = \frac{1}{n^n} \leq v_n = \frac{1}{n^2}$$

Por el criterio de comparación
 $\Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$ es convergente.

La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n+1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$

- Para estudiar su convergencia o divergencia utilizaremos el criterio de Pringsheim.

Vamos a recordarlo:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \text{ serie a estudiar}$$

$$\hookrightarrow u_n = \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$C = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n + \dots \text{ serie armónica generalizada que sea convergente.}$$

$$\hookrightarrow c_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ con } \alpha > 1$$

Entonces:

$$\rightarrow \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{c_n} = l = n^\circ \text{ finito, entonces } S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ converge}$$

$$\rightarrow \text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{c_n} = \infty, \text{ entonces, no podemos decidir}$$

Veamos:

$$\text{Consideremos } C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ con } \alpha > 1 \text{ (serie convergente).}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{c_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\alpha - \frac{n+1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\alpha n - n - 1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{(\alpha-1)n - 1}{n}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} n \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha-1)n - 1}{n}} = \\ &= \infty^{(\alpha-1)} = \infty \text{ por ser } \alpha-1 > 1 \end{aligned}$$

Es decir, aún no podemos tomar una decisión.

Utilizaremos otro apartado del criterio de Pringsheim.

Vamos a recordarlo:

$$D = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots \text{ serie armónica generalizada que sea divergente.}$$

$$\hookrightarrow d_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ con } \alpha \leq 1$$

Entonces:

→ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{d_n} \neq 0$ (finito o infinito), entonces $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ es divergente.

→ Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{d_n} = 0$, entonces no podemos decidir.

Veamos:

Consideremos la serie armónica normal ($\alpha=1$)

$D = \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que sabemos es divergente.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{d_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^{\frac{n+1}{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1 - \frac{n+1}{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{n-n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1/n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1 \quad (*) \leftarrow \underline{\text{Ver}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{d_n} = 1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ diverge}}$$

$$\boxed{S = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n+1}{n}} \text{ es divergente}}$$

\Rightarrow la alternativa correcta es **(6)**

(*) \rightarrow Vamos a demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$

Veamos:

Vamos a considerar la función continua en $(0, +\infty)$ $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{x}$.

$$\text{Buscamos } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

$$\text{Llamemos } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x}$$

$$\text{Entonces } \ln A = \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

$$= \text{Aplicando L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{Por tanto } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow A = 0^\circ = 1 \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{1}}$$

Lógicamente, si $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ con $x \in \mathbb{R}^+$, podemos

asegurar que $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ c. f. d

Ejercicio nº 4.-

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es una serie armónica generalizada del tipo

$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ con $x > 1$, por lo que sabemos que es convergente.

Por tanto: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ es convergente

La alternativa correcta es (a)

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2001/02***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Resolución aproximada de ecuaciones

Código: ACANMA23.WPD

Ejercicio nº 1.- (Propuesto en septiembre de 2001)La ecuación $x + \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$:

- a) Tiene una raíz en el intervalo $[-\pi, 0]$
- b) Posee una única raíz en el intervalo $\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (Propuesto en febrero de 2001)La ecuación $x^4 + 2x - 1 = 0$:

- a) Posee una única raíz en $[0, 2]$ y si se toma $x = \frac{1}{2}$ como valor aproximado de dicha raíz, el error cometido es menor o igual que $\frac{1}{32}$.
- b) No posee ninguna raíz en $[0, 2]$.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (Propuesto en febrero de 2001)La ecuación $x^4 + 2x - 5 = 0$:

- a) Posee una única raíz en el intervalo $[0, 2]$ y no tiene ninguna raíz en el intervalo $[0, 1]$
- b) Tiene al menos dos raíces en el intervalo $[0, 2]$.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.-Al aplicar una vez el método de Newton o de la tangente para resolver la ecuación $e^x + x^2 = 5$, buscando una solución dentro del intervalo $[0, 2]$, nos encontramos que:

- a) La aproximación a la solución que encontramos es menor que la verdadera solución y su valor es $\alpha = \frac{e}{2}$
- b) La aproximación encontrada es mayor que la verdadera solución y su valor es $\alpha = \frac{e^2 + 9}{e^2 + 4}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES : ACANAMA23.WPD

Ejercicio nº 1

$$x + \operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ecuación}$$

- Consideremos la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2}$
- $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} ya que las funciones $g(x) = x$, $h(x) = \operatorname{sen} x$ y $t(x) = \frac{\pi}{2}$ son funciones continuas.
- Consideremos la función f definida en el intervalo $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$

$$\left. \begin{array}{l} f: [-\pi, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x + \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$$

- Analicemos f para determinar si tiene o no una raíz $\alpha \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$

$$\left. \begin{array}{l} f(-\pi) = -\pi + \operatorname{sen}(-\pi) - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2} + 0 = -\frac{3\pi}{2} < 0 \\ f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(-\pi) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f: [-\pi, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ función} \\ f \text{ es continua en } [-\pi, \frac{\pi}{2}] \\ f(-\pi) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \alpha \in (-\pi, \frac{\pi}{2}) \mid f(\alpha) = 0$$

Es decir, podemos asegurar que la ecuación $x + \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2} = 0$ tiene, al menos, una solución en $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$

- Nos preguntamos: ¿Es la única solución dentro del intervalo $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$?

Veamos:

Si descubrimos que $f'(x)$ tiene signo constante dentro del intervalo $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$, tendremos que $f(x)$ es una función creciente (si $f'(x) > 0$) o decreciente (si $f'(x) < 0$) en todo el intervalo $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$, por lo que podremos asegurar que α (la raíz de $f(x) = 0$) es única en $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

$$f'(x) = 1 + \cos x > 0 \quad \forall x \in (-\pi, \frac{\pi}{2}) \quad \text{y} \quad f'(-\pi) = 0$$

Es decir, $f(x) = x + \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2}$ es creciente en todo $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$

Conclusión: En el intervalo $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ hay una única solución de $x + \operatorname{sen} x - \frac{\pi}{2} = 0$

La respuesta correcta es (b)

Ejercicio nº 2

Consideremos la función $f(x) = x^4 + 2x - 1$.

$f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} y por tanto lo es en el intervalo $[0, 2]$.

Entonces consideremos $f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto f(x) = x^4 + 2x - 1$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(2) = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0$$

Podemos asegurar que $\exists \alpha \in [0, 2]$ tal que $f(\alpha) = 0$, es decir, $\alpha^4 + 2\alpha - 1 = 0$, es decir, la ecuación $x^4 + 2x - 1 = 0$ tiene solución en el intervalo $[0, 2]$.

Veamos si dentro de $[0, 2]$ la solución α es única.

$$f'(x) = 4x^3 + 2 > 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

Es decir, $f'(x)$ es positiva en todo $[0, 2]$, lo cual nos indica que la función $f(x) = x^4 + 2x - 1$ es estrictamente creciente en todo el intervalo $[0, 2]$ y, por tanto, podemos asegurar que en $[0, 2]$ HAY UNA ÚNICA RAÍZ de la ecuación.

Supongamos que tomamos como raíz $\alpha = \frac{1}{2}$. ¿qué error cometemos?

Veamos:

$$\left. \begin{array}{l} f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^4 + 2x - 1 \end{array} \right\}$$

• f continua

• $f(0) \cdot f(2) < 0$

• $f'(x)$ existe en todo $(0, 2)$

$$\left. \begin{array}{l} |f'(x)| \geq m > 0 \quad \forall x \in (0, 2) \\ \hookrightarrow m = |f'(0)| = 2 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{error} = \left| \alpha - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{|f'(1/2)|}{m}$$

$$f'(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{16}$$

Es decir:

$$\text{error} = \left| \alpha - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\left| \frac{1}{16} \right|}{2} = \frac{\frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{32}$$

Conclusión: La respuesta correcta es (a)

Ejercicio n° 3.-

$$x^4 + 2x - 5 = 0$$

- Consideremos la función $f(x) = x^4 + 2x - 5$
- $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} y por tanto lo será en los intervalos $[0, 2]$ y $[0, 1]$.
- Analicemos la alternativa (a)

$$\left. \begin{array}{l} f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = x^4 + 2x - 5 \end{array} \right\} \text{continua.}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -5 \\ f(2) = 15 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0$$

- Podemos asegurar que $f(x)$ corta el eje de abscisas en un punto (al menos) $\alpha \in (0, 2)$.
- Nos preguntamos: ¿Es el único punto de corte entre 0 y 2?

Veamos:

$$f'(x) = 4x^3 + 2 > 0 \quad \forall x \in [0, 2], \text{ es decir, la función } f(x) = x^4 + 2x - 5 \text{ es estrictamente creciente en } [0, 2].$$

Por tanto: $f(x)$ corta el eje de abscisas entre 0 y 2 en un único punto α . Por tanto: (b) ES FALSA

- Nos preguntamos: ¿Esta α entre 0 y 1?

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -5 \\ f(1) = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ NO ESTA entre } 0 \text{ y } 1 \\ \alpha \notin [0, 1]$$

Por tanto:

La ecuación $x^4 + 2x - 5 = 0$ posee una raíz única en el intervalo $[0, 2]$ y no tiene ninguna raíz en el intervalo $[0, 1]$.

Conclusión: La respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 4.-

$$e^x + x^2 = 5 \rightarrow \text{ecuación} \Rightarrow e^x + x^2 - 5 = 0 \text{ ecuación}$$

- Consideremos la función $f(x) = e^x + x^2 - 5$
- Consideremos el intervalo $[0, 2]$

Veamos si es posible aplicar el método de Newton o de la tangente:

$$\begin{array}{l} * \left. \begin{array}{l} f: [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = e^x + x^2 - 5 \end{array} \right\} \text{función continua en } [0, 2] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} * \left. \begin{array}{l} f(0) = e^0 + 0^2 - 5 = 1 - 5 = -4 < 0 \\ f(2) = e^2 + 2^2 - 5 = e^2 - 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0 \end{array}$$

Los dos apartados anteriores nos indican que la ecuación dada tiene, al menos, una solución entre 0 y 2. Es decir: $\exists \alpha \in (0, 2) \mid e^\alpha + \alpha^2 = 5$

$$\begin{array}{l} * \left. \begin{array}{l} f'(x) = e^x + 2x \text{ existe } \forall x \in [0, 2] \\ f''(x) = e^x + 2 \text{ existe } \forall x \in [0, 2] \end{array} \right\} \end{array}$$

$$* f''(x) = e^x + 2 \text{ es continua en } [0, 2]$$

$$\begin{array}{l} * \left. \begin{array}{l} f'(x) = e^x + 2x > 0 \quad \forall x \in [0, 2] \\ f''(x) = e^x + 2 > 0 \quad \forall x \in [0, 2] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Es decir, } f'(x) \text{ tiene signo constante} \\ \text{en todo el intervalo } [0, 2] \text{ y } f''(x) \\ \text{también tiene signo constante en todo } [0, 2]. \end{array} \end{array}$$

$$\text{Estamos en el caso } f'(x) > 0 \rightarrow f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

Todo lo anterior nos indica que podemos aplicar el método de Newton o de la tangente en el caso que nos ocupa.

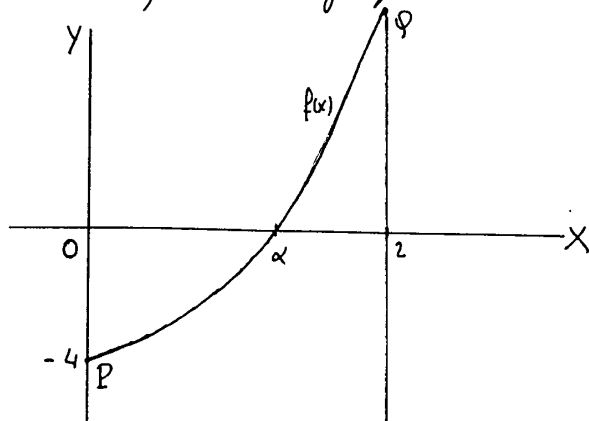
Analicemos la situación:

$$\begin{array}{l} \bullet \text{ A ser } \left. \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(2) > 0 \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 2] \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Podemos asegurar que } f(x) \text{ es estrictamen-} \\ \text{te creciente en } [0, 2] \end{array} \end{array}$$

Esto nos garantiza que entre 0 y 2 la ecuación $e^x + x^2 - 5 = 0$ tiene solución única.

$$\bullet \text{ Al ser } f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 2], \text{ tenemos que la gráfica de la función } f(x) = e^x + x^2 - 5 \text{ es convexa hacia abajo en todo el intervalo } [0, 2]$$

La interpretación gráfica a los dos apartados anteriores es:



$$f(x) = e^x + x^2 - 5 \quad \text{función}$$

$f(x)$ es creciente estrictamente en $[0, 2]$ por ser $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 2]$

$f(x)$ es convexa hacia abajo en $[0, 2]$ por ser $f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 2]$

α es el punto buscado, es decir:

$$f(\alpha) = 0$$

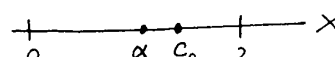
$$e^\alpha + \alpha^2 - 5 = 0 \quad \alpha \in [0, 2]$$

- Aplicar el método de Newton es:

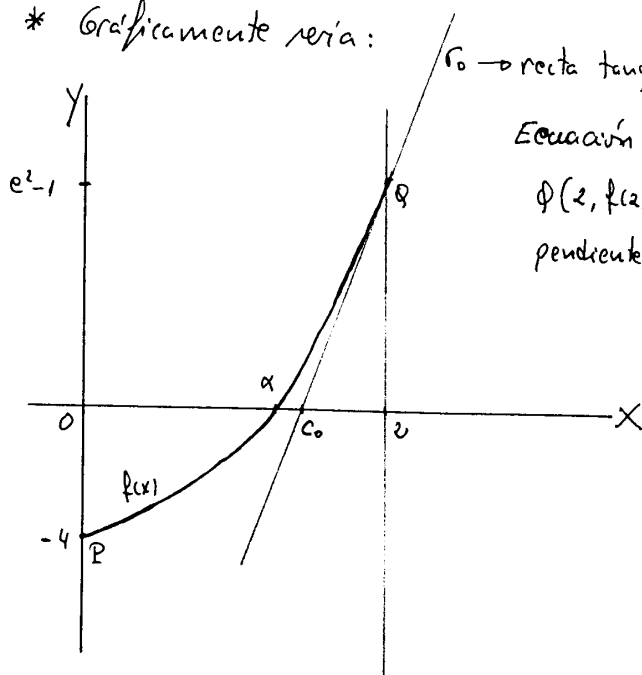
- * "Trazar" la recta r_0 : tangente a $f(x)$ en el punto $Q(2, f(2))$

- * Determinar la ecuación de esa recta r_0

- * Hallar el punto de corte de r_0 con el eje OX . De ese punto de corte nos interesa la abscisa c_0 .

- * Consideramos que $c_0 \approx \alpha$. Es decir: 

- * Gráficamente sería:



$r_0 \rightarrow$ recta tangente a $f(x)$ en el punto Q

Ecuación de r_0 : Ecuación punto pendiente.

$$\left. \begin{array}{l} Q(2, f(2)) = (2, e^2 - 1) \\ \text{pendiente de } r_0 = m_0 = f'(2) = e^2 + 4 \end{array} \right\}$$

$$y - (e^2 - 1) = (e^2 + 4)(x - 2)$$

$$y - e^2 + 1 = (e^2 + 4)x - 2e^2 - 8$$

$$\boxed{y = (e^2 + 4)x - (e^2 + 9)} : r_0$$

NOTA: A simple vista observamos que la aproximación buscada c_0 es mayor que la verdadera solución α ($c_0 > \alpha$), por lo que podemos asegurar que la alternativa (a) es FALSA.

Analicemos la alternativa (b)

- Hallemos el punto de corte de r_0 con el eje de abscisas:

$$r_0: y = (e^2 + 4)x - (e^2 + 9)$$

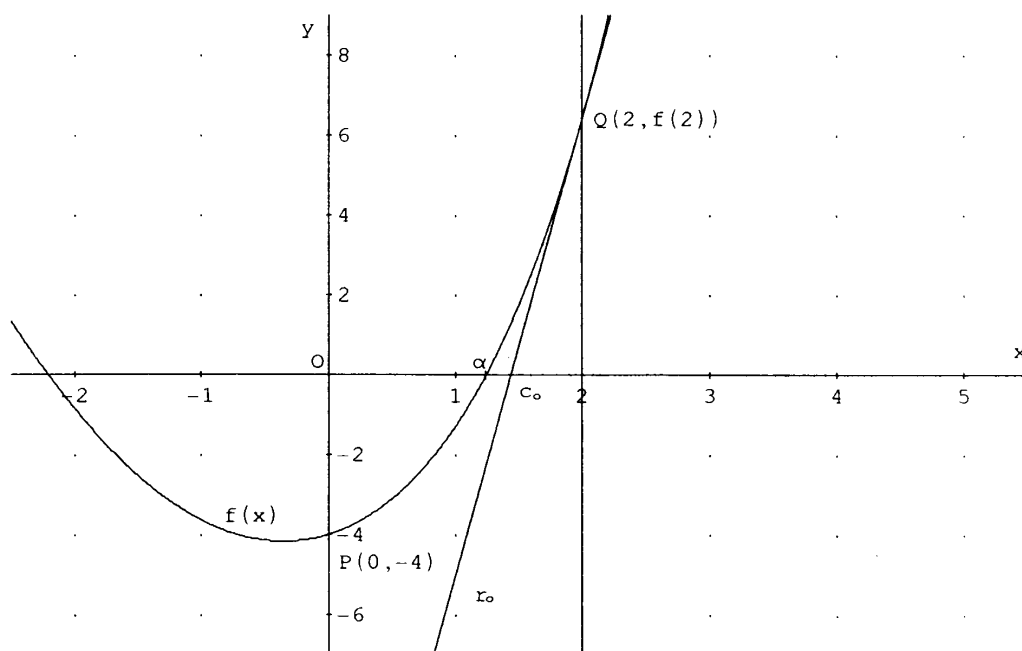
$$y = 0 \Rightarrow (e^2 + 4)x = e^2 + 9 \Rightarrow x = \frac{e^2 + 9}{e^2 + 4} \Rightarrow \boxed{C_0 = \frac{e^2 + 9}{e^2 + 4}}$$

Tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \text{La aproximación es } \alpha = \frac{e^2 + 9}{e^2 + 4} \\ \text{En realidad } \frac{e^2 + 9}{e^2 + 4} > \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \textcircled{6} \text{ es verdadera.}$$

Conclusión: La respuesta correcta es $\textcircled{6}$

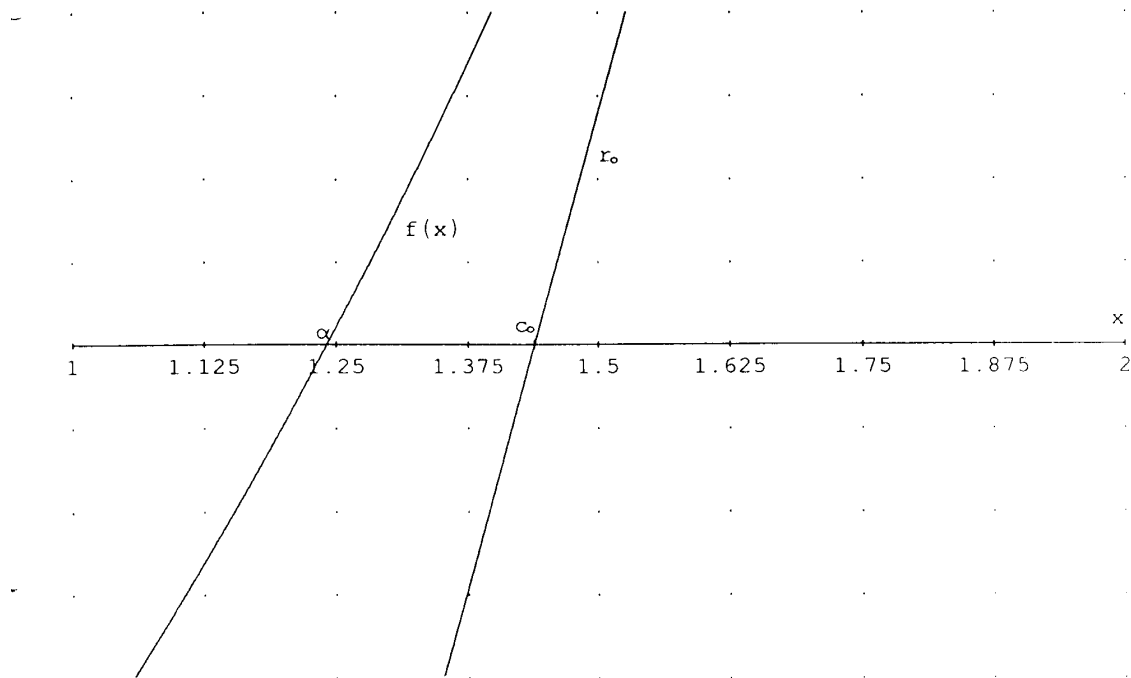
- Para comprobar los resultados obtenidos, resolvamos el problema gráficamente:



En la gráfica observamos todo lo visto anteriormente:

- * $f(x) = e^x + x^2 - 5$ es estrictamente creciente en $[0, 2]$ y convexa hacia abajo en dicho intervalo.
- * $f(x)$ corta al eje de abscisas en un único punto α entre 0 y 2. Observamos que también corta en otro punto próximo a $x = -2$.
- * Al aplicar el método de Newton obtenemos $C_0 = \frac{e^2 + 9}{e^2 + 4} \approx 1.439017945$
- * Vemos que $C_0 > \alpha$

- Modifiquemos el rango y la escala del eje de abscisas para apreciar mejor los valores de α y de C_0 :



En la gráfica apreciamos que al considerar que $C_0 = \alpha$ el error cometido es aproximadamente $\varepsilon = 0.2$

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2001/02

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral.

Código: ACANMA24.WPD

Ejercicio nº 1.- (Propuesto en febrero de 2001)

El valor de la integral $\int_1^4 \frac{Lx}{\sqrt{x}} dx$ es:

- a) $-4 + 4 L4$
- b) $2 - L4$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (Propuesto en febrero de 2001)

En $x=0$ la función $F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{1/2} dt$ tiene:

- a) Un mínimo relativo
- b) Un máximo relativo
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (Propuesto en febrero de 2001)

El valor de la integral $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x(2+3Lx)}$ es:

- a) $\frac{1}{3} L8$
- b) $\frac{2}{3} L2$
- c) *Ninguna de las anteriores respuestas.*

Ejercicio nº 4.- (Propuesto en febrero de 2001)

La derivada de la función $F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2} dt$ en el punto $x = -2$ es:

- a) $-2\sqrt{5} + 4\sqrt{17}$
- b) $\sqrt{5} - 4\sqrt{17}$
- c) *Ninguna de las anteriores respuestas*

SOLUCIONES

ACANMA24.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$I = \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

Primero resolvemos la integral indefinida $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

$$\text{Por partes: } \left. \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ dv = \frac{1}{\sqrt{x}} dx \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ v = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \end{array} \right.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int u dv = u \cdot v - \int v du = \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} - \int 2\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \\ &= 2\sqrt{x} \sqrt{x} - 2 \int \frac{x^{1/2}}{x} dx \end{aligned}$$

$$\text{Resolvamos } \int \frac{x^{1/2}}{x} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} = \frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$$

Entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \sqrt{x} - 2 \cdot 2\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \sqrt{x} - 4\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \sqrt{x} - 4\sqrt{x} \right]_1^4 = 2\sqrt{4} \cdot 2 - 4\sqrt{4} - (2\sqrt{1} - 4\sqrt{1}) = \\ &= 4 \cdot 4 - 8 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + 4 = -4 + 4 \cdot 4 \end{aligned}$$

Conclusión: La respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 2

$$x=0 \quad F(x) = \int_0^{x^2} (1+t^3)^{1/2} dt$$

Hallemos $F'(x)$:

Definimos $z = x^2$

Entonces: $H(z) = \int_0^z (1+t^3)^{1/2} dt = F(x)$

Como $f(t) = (1+t^3)^{1/2} = \sqrt{1+t^3}$ es continua en $[0, +\infty)$, lo será en todo intervalo $[0, b]$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo integral:

$$H'(z) = (1+z^3)^{1/2} = \sqrt{1+z^3} = \frac{dH}{dz}$$

$$H(z) = H(x^2)$$

Derivemos $H(z)$ con respecto a x :

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dF}{dx} = \frac{dH}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^3} \cdot 2x = \sqrt{1+x^6} \cdot 2x$$

Es decir: $F'(x) = 2x \sqrt{1+x^6}$

Para $x=0$ es $F'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \sqrt{1} = 0 \Rightarrow$ Posible extremo

Hallemos $F''(x)$:

$$F''(x) = 2 \cdot \sqrt{1+x^6} + 2x \cdot \frac{6x^5}{2\sqrt{1+x^6}}$$

$F''(0) = 2 > 0 \Rightarrow$ En $x=0$ la función $F(x)$ tiene un mínimo relativo.

Conclusión: La respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 3

$$\int_1^{e^2} \frac{dx}{x \cdot (2+3 \ln x)}$$

Resolvamos la integral indefinida $I = \int \frac{dx}{x(2+3 \ln x)}$

Por cambio de variable.

$$\left. \begin{aligned} t &= 2 + 3 \ln x \\ dt &= 3 \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{3} dt \end{aligned} \right\}$$

$$I = \int \frac{1}{2+3 \ln x} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{3} \ln t + C = \frac{1}{3} \ln(2+3 \ln x) + C$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \frac{dx}{x(2+3 \ln x)} &= \left[\frac{1}{3} \ln(2+3 \ln x) \right]_1^{e^2} = \frac{1}{3} \ln(2+3 \cdot \ln e^2) - \frac{1}{3} \ln(2+3 \ln 1) = \\ &= \frac{1}{3} \ln(2+3 \cdot 2 \cdot \ln e) - \frac{1}{3} \ln(2+3 \cdot 0) = \frac{1}{3} \ln 8 - \frac{1}{3} \ln 2 = \\ &= \frac{1}{3} (\ln 8 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln \frac{8}{2} = \frac{1}{3} \ln 4 = \frac{1}{3} \ln 2^2 = \frac{2}{3} \ln 2 \end{aligned}$$

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

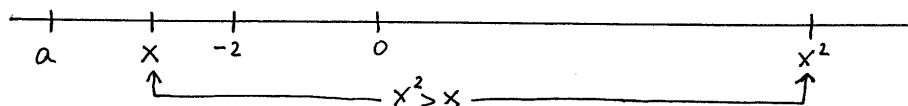
Ejercicio nº 4.-

$$F(x) = \int_{x^2}^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}. \text{ Buscamos } F'(-2)$$

Vemos:

Se trata de hallar la derivada de $F(x)$ en $x=-2$.

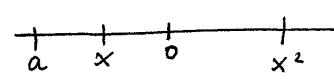
Gráficamente significa lo siguiente:



Es decir:

El límite inferior de $\int_{x^2}^x$ es superior al límite superior ($x^2 > x$)

En este caso tenemos que:

$$\int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2} dt = - \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = -F(x)$$


Ahora bien:

$$\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = \int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt - \int_a^x \sqrt{1+t^2} dt = G(x) = -F(x)$$

Entonces:

$$\left. \begin{array}{l} G_1: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_1(x) = \int_a^x \sqrt{1+t^2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow G_1'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_2: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_2(x) = x^2 = z \end{array} \right\} \Rightarrow G_2'(x) = \frac{dz}{dx} = 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} G_3: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_3(x) = \int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \end{array} \right\}$$

Entonces, tenemos:

$$G(x) = G_3(x) - G_1(x) = -F(x)$$

$$(G_1 \circ G_2)(x) = G_1(G_2(x)) = G_1(z) = \int_a^z \sqrt{1+t^2} dt = \int_a^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt = G_3(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} G_3'(x) = \frac{dG_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sqrt{1+z^2} \cdot 2x = \sqrt{1+x^4} \cdot 2x \\ G_1'(x) = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right\}$$

Derivando $G(x)$:

$$G'(x) = G_3'(x) - G_1'(x) = 2x \cdot \sqrt{1+x^4} - \sqrt{1+x^2}$$

Como $-F(x) = G(x)$ o $F(x) = -G(x)$ y por tanto $F'(x) = -G'(x)$

$$\text{Es decir: } F'(x) = -2x \cdot \sqrt{1+x^4} + \sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} - 2x \cdot \sqrt{1+x^4}$$

$$\text{Para } x = -2 \text{ o } F'(-2) = \sqrt{1+4} + 4 \cdot \sqrt{1+16} = \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{17}$$

$$\boxed{F'(-2) = \sqrt{5} + 4 \cdot \sqrt{17}}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (c)

U.N.D.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2002/03

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Series numéricas

Código: ACANMA26.WPD

Ejercicio nº 1.-

Averiguar el carácter de la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Ejercicio nº 2.-

Estudiar el carácter de la serie $\sum \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$

Ejercicio n.º 1.-

Averiguar el carácter de la serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Solución:

$$-\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots$$

La serie $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente porque:

Serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$		Serie $\sum \frac{1}{n}$ (armónica)	
$\frac{1}{\sqrt{1}}$	\geq	$\frac{1}{1}$	} \Rightarrow Como la serie armónica es divergente, la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ también lo es.
$\frac{1}{\sqrt{2}}$	\geq	$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	\geq	$\frac{1}{3}$	
.....			
$\frac{1}{\sqrt{n}}$	\geq	$\frac{1}{n}$	

Por tanto: La serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ NO ES ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE

porque $\sum \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ NO ES CONVERGENTE

Ahora bien:

La serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ es ALTERNADA por tener sus términos alternativamente positivos y negativos.

La sucesión de términos $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (es decir números reales) es decreciente y converge a cero. Es decir:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \dots \rightarrow 0 \quad \text{y decrece} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \right)$$

Aplicando el criterio de Leibnitz:

$$\left\{ x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \begin{array}{l} \text{sucesión decreciente} \\ \text{y convergente} \end{array} \right. \right\} \Rightarrow \text{La serie } \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ es } \underline{\underline{\text{CONVERGENTE}}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Ejercicio nº 2.-

Estudiar el carácter de la serie $\sum \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$

Solución:

Si $\sum \left| \frac{3^n + (-2)^n}{6^n} \right|$ converge, entonces $\sum \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$ converge.

Vemos:

$$\begin{aligned}\sum \left| \frac{3^n + (-2)^n}{6^n} \right| &= \sum \left| \frac{3^n}{6^n} + \frac{(-2)^n}{6^n} \right| \leq \sum \left(\left| \frac{3^n}{6^n} \right| + \left| \frac{(-2)^n}{6^n} \right| \right) = \sum \left| \frac{3^n}{6^n} \right| + \sum \left| \frac{(-2)^n}{6^n} \right| = \\ &= \sum \frac{3^n}{6^n} + \sum \frac{2^n}{6^n} = \sum \frac{1}{2^n} + \sum \frac{1}{3^n}\end{aligned}$$

La serie $\sum \frac{1}{2^n}$ es convergente por tratarse de una serie de términos generales $a_n = \frac{1}{2^n}$ correspondiente a una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$ tal que $|r| < 1$

Idéntico motivo para la serie $\sum \frac{1}{3^n}$, de razón $r = \frac{1}{3}$ y $|r| < 1$

Por tanto:

$$\sum \frac{1}{2^n} = S \quad \text{y} \quad \sum \frac{1}{3^n} = S' \quad \text{finitos}$$

Entonces:

$$\sum \left| \frac{3^n + (-2)^n}{6^n} \right| \leq S + S', \text{ es decir, es convergente, con lo que:}$$

$$\sum \frac{3^n + (-2)^n}{6^n} \text{ es CONVERGENTE.}$$

Ejercicio nº 1.-

Calcular la derivada de la función $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

Ejercicio nº 2.-

Calcular la función derivada de la función $g(x) = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt$

Ejercicio nº 3.-

Sea f una función continua en \mathbb{R} . Definamos la función $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$
Calcular $F'(x)$.

Ejercicio nº 4.-

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^3) dt}{x^4}$

Ejercicio nº 5.-

Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}$

Ejercicio nº 6.-

Calcular $I = \int_{-1}^1 |3x+1| dx$

EJERCICIOS

ACANMA27.WPD

Ejercicio 1.-

Calcular la derivada de la función $f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$

Solución:

Por comodidad llamaremos $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$ y $f(t) = \frac{1}{1+t}$

$$\left. \begin{array}{l} f: [0, x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow f(t) = \frac{1}{1+t} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \text{Diagrama de la integral:} \\ \text{Una línea horizontal con puntos } 0, t, x \text{ marcados.} \\ \text{Debajo de } t \text{ se indica } t \in \mathbb{R} \\ \text{Debajo de } x \text{ se indica } x \in \mathbb{R} \end{array}$$

f es una función continua en todo \mathbb{R}^+ (en todo $[0, +\infty)$) y por tanto es integrable en todo $[0, x]$.

Por el primer teorema fundamental del cálculo, la integral indefinida:

$$\left. \begin{array}{l} F: [0, a] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow F(x) = \int_0^x f(t) dt \end{array} \right\} \forall x \in [0, a]$$

es derivable en todo $x \in [0, a]$ y además $F'(x) = f(x)$

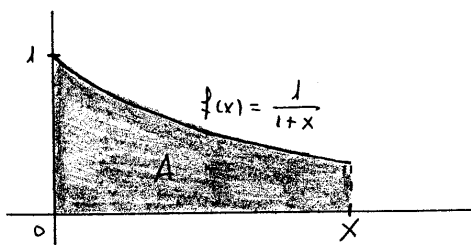
Por tanto:

$$F'(x) = f(x) = \frac{1}{1+x}$$

Utilizando la notación del enunciado:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{1+x}}$$

Gráficamente:



$$\text{Area } A = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

Ejercicio 2.-

Calcular la función derivada de la función $g(x) = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt$

Solución:

Por comodidad vamos a llamar:

- $H(x) = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt$. Busco $H'(x)$
- $g(x) = x^2$ es una función continua en todo \mathbb{R} y por tanto integrable.
- $G: [-1, a] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto G(x) = \int_{-1}^x g(t) dt$ } $G'(x) = g(x) = x^2$
- $f(x) = x^2 + 1 \longrightarrow$ función derivable en todo \mathbb{R} . $f'(x) = 2x$

Entonces:

$$H(x) = (G \circ f)(x) = G(f(x)) = G(x^2 + 1) = \int_{-1}^{x^2+1} g(t) dt = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt.$$

Derivando:

$$H'(x) = (G \circ f)'(x) = G'(x^2 + 1) = G'(y) = \frac{dG}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)^2 \cdot 2x$$

$\hookrightarrow y = x^2 + 1$

Volviendo a la notación del enunciado, es decir: $g(x) = \int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt$

$g'(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot 2x$

Ejercicio 3.-

Sea f una función continua en \mathbb{R} .

Definimos la función $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$.

Calcular $F'(x)$

Solución:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua en todo \mathbb{R} y por tanto en todo $[0, b] \subset \mathbb{R}$
y por tanto integrable en todo \mathbb{R} .

$\phi: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto \phi(x) = \int_0^x f(t) dt$ } Es la integral indefinida de f

Por el primer Teorema Fundamental del Cálculo aseguramos que $\phi'(x) = f(x)$.

$$F(x) = \int_0^x x f(t) dt = x \int_0^x f(t) dt = x \phi(x) \quad (x \text{ puede salir fuera de } \int \text{ por considerarse conste.})$$

$$\text{Entonces: } F'(x) = (x \cdot \phi(x))' = 1 \cdot \phi(x) + x \cdot \phi'(x) = \int_0^x f(t) dt + x \cdot f(x)$$

Ejercicio 4.-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^2) dt}{x^4}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^2) dt}{x^4} = \frac{\int_0^0 (t^3 + t^2) dt}{0^4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Tenemos:

$f(x) = x^3 + x^2$ función continua, positiva e integrable en $[0, +\infty)$

La integral indefinida de f es:

$$\left. \begin{array}{l} F: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (t^3 + t^2) dt \end{array} \right\}$$

Además, por el primer teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x) = x^3 + x^2$$

Por otra parte, la función $g(x) = x^4$ es derivable. $g'(x) = 4x^3$

Entonces, podemos aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t^3 + t^2) dt}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{4x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2}{4x^3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 5.-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4} = \frac{\int_0^0 t^2 dt}{0^4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^2 \end{array} \right\} \text{ función continua, positiva, integrable.}$$

$$\left. \begin{array}{l} F: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x t^2 dt \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Integral indefinida de } f. \\ \text{Además } F'(x) = x^2 = f(x) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} H: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto H(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt = \int_0^{x^2} t^2 dt \end{array} \right\}$$

Podemos considerar que $H = F \circ f$

$$\text{En efecto: } H(x) = (F \circ f)(x) = F(f(x)) = \int_0^{f(x)} f(t) dt = \int_0^{x^2} t^2 dt$$

Derivando:

$$H'(x) = (F \circ f)'(x) = [F(f(x))]' = F'(y) = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = y^2 \cdot y' = (x^2)^2 \cdot 2x = x^4 \cdot 2x = 2x^5$$

\hookrightarrow llamamos $y = f(x) = x^2$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H'(x)}{(x^4)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^5}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{2} = 0$$

\hookrightarrow Aplicamos L'Hôpital

Ejercicio 6.-

Calcular $I = \int_{-1}^1 |3x+1| dx$

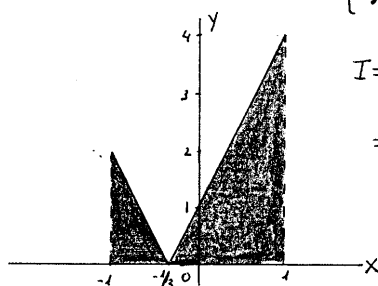
Solución:

Analizamos la función $f(x) = |3x+1| = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } 3x+1 \geq 0; 3x \geq -1; x \geq -\frac{1}{3} \\ -3x-1 & \text{si } 3x+1 < 0; 3x < -1; x < -\frac{1}{3} \end{cases}$

En nuestro caso $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = |3x+1| = \begin{cases} -3x-1 & \text{si } -1 \leq x < -\frac{1}{3} \\ 3x+1 & \text{si } -\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$

Gráficamente:

$-1 \leq x < -\frac{1}{3}$	$y = -3x-1 \rightarrow$ recta
-1	2
$(-\frac{1}{3})^-$	0^+
$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$	$y = 3x+1 \rightarrow$ recta
$-\frac{1}{3}$	0
1	4



$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 |3x+1| dx = \text{ÁREA SOMBRADA} = \\ &= \int_{-1}^{-1/3} (-3x-1) dx + \int_{-1/3}^1 (3x+1) dx = \int_{-1}^{-1/3} (-3x) dx - \int_{-1}^{-1/3} 1 dx + \\ &\quad + \int_{-1/3}^1 3x dx + \int_{-1/3}^1 1 dx = \left[-\frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{-1/3} - \left[x \right]_{-1}^{-1/3} + \\ &\quad + \left[\frac{3x^2}{2} \right]_{-1/3}^1 + \left[x \right]_{-1/3}^1 = \dots = \frac{10}{3} u^2 \end{aligned}$$

Ejercicio nº 1.- (Propuesto en septiembre de 2002)

Dada la función $f(x) = x(1 + \operatorname{sen} x)$, se tiene:

- a) f nunca toma el valor 1
- b) f toma el valor 2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.-

La función $f(x) = \frac{2x}{b + |x|}$ con $b \in \mathbb{R}$:

- a) Es discontinua en $x = -b$ para todo $b \in \mathbb{R}$
- b) Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$
- c) Si $b=0$, es discontinua en algún punto.

Ejercicio nº 3.-

La ecuación $2Lx = 2 - x$ (Lx es logaritmo neperiano de x):

- a) Posee una única raíz real.
- b) Posee varias raíces reales.
- c) Ninguna de las anteriores repuestas.

Ejercicio nº 4.-

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} & \text{si } x \neq 64 \\ a & \text{si } x = 64 \end{cases}$, entonces:

- a) Si $a = 0$, $f(x)$ es continua en $x = 64$.
- b) Si $a = 3$, $f(x)$ es continua en $x = 64$
- c) Si $a = 4$, $f(x)$ es continua en $x = 64$

Ejercicio nº 5.-

La función $f(x) = \frac{x}{1 + a|x|}$ con $a \in \mathbb{R}$:

- a) Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a > 0$.
- b) Es discontinua sólo en los puntos $x = -1/a$ y $x = 1/a$
- c) Es continua en todo $x \in \mathbb{R}$ si y sólo si $a \geq 0$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA28.WPD

Ejercicio nº 1

$$f(x) = x \cdot (1 + \operatorname{sen} x) = x + x \cdot \operatorname{sen} x$$

contestemos al apartado a)

f nunca toma el valor 1 significa que $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$, es decir, la ecuación $x + x \cdot \operatorname{sen} x = 1$ no tiene solución.

Veamos:

- Consideremos la función $h(x) = x + x \cdot \operatorname{sen} x - 1$

La función $h(x)$ es continua en todo \mathbb{R} porque es suma de tres funciones continuas en todo \mathbb{R} . Es decir:

$$h(x) = x + x \cdot \operatorname{sen} x - 1$$

$\rightarrow y = -1$ es continua por ser función constante.
 $\rightarrow y = x \cdot \operatorname{sen} x$ es continua porque $y = x$ es continua e $y = \operatorname{sen} x$ también es continua.
 $\rightarrow y = x$ es continua por ser una función polinómica.

- Apliquemos el Teorema de Bolzano a $h(x)$ en el intervalo $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto h(x) = x + x \cdot \operatorname{sen} x - 1 \end{array} \right\} \text{continua en } [0, 1] \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \exists c \in (0, 1) \mid h(c) = 0 \\ h(0) = 0 + 0 \cdot \operatorname{sen} 0 - 1 = 0 + 0 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \\ h(1) = 1 + 1 \cdot \operatorname{sen} 1 - 1 = \operatorname{sen} 1 > 0 \end{array} \right.$$

↳ NOTA: 1 radian

$\operatorname{sen} 1 > 0$ porque $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ radianes

Es decir: Como no cumplen las hipótesis del Teorema de Bolzano para la función $h(x)$ en $[0, 1]$, tenemos que:

$$\exists c \in (0, 1) \mid h(c) = 0$$

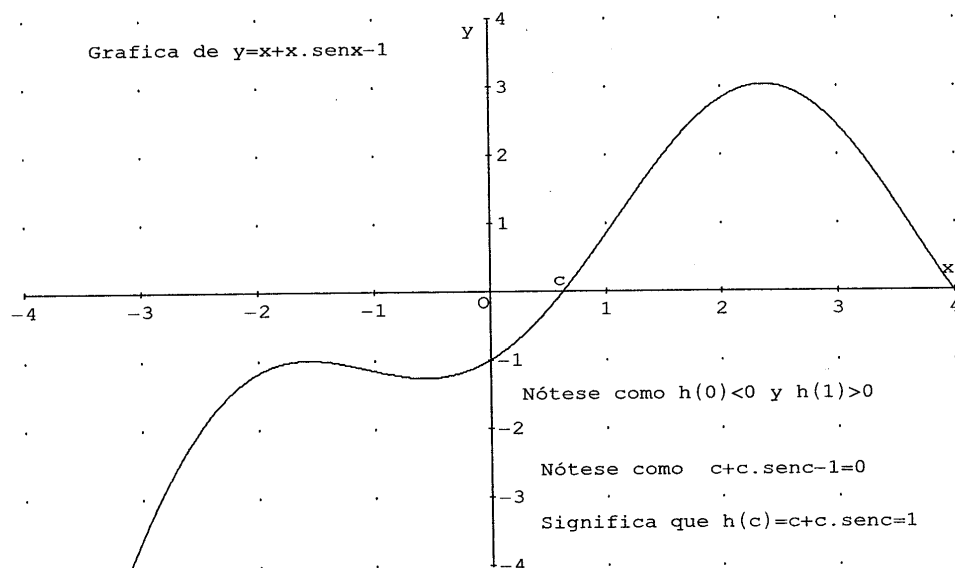
$$c + c \cdot \operatorname{sen} c - 1 = 0$$

$$c \cdot (1 + \operatorname{sen} c) = 1$$

$f(c) = 1 \Rightarrow$ la función f sí toma el valor 1.
lo hace para un $c \in (0, 1)$

Por tanto: la alternativa a) es FALSA

Veamos con la gráfica de la función $h(x) = x + x \cdot \operatorname{sen} x - 1$ como corta al eje de abscisas en un punto c tal que $0 < c < 1$.



Contestemos a la alternativa b)

f toma el valor c significa que $\exists t \in \mathbb{R} \mid f(t)=c$

Veamos:

Consideremos los valores $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ y hallemos sus imágenes:

$$x=0 \Rightarrow f(0) = 0 \cdot (1 + \text{sen } 0) = 0 \cdot (1+0) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot (1 + \text{sen } \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot (1+1) = \pi \approx 3'141592\dots$$

Recordemos el Teorema de los Valores Intermedios y apliquemos a la función $f(x) = x + x \cdot \text{sen } x$ en el intervalo $I = [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\left. \begin{array}{l} f: [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x + x \cdot \text{sen } x \end{array} \right\} \text{continua en } [0, \frac{\pi}{2}] \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \forall c \in [f(0), f(\frac{\pi}{2})] \\ \text{existe } t \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{tal que } f(t) = c \end{array} \right.$$

$f(0) = 0$
 $f(\frac{\pi}{2}) = \pi \approx 3'141592\dots$

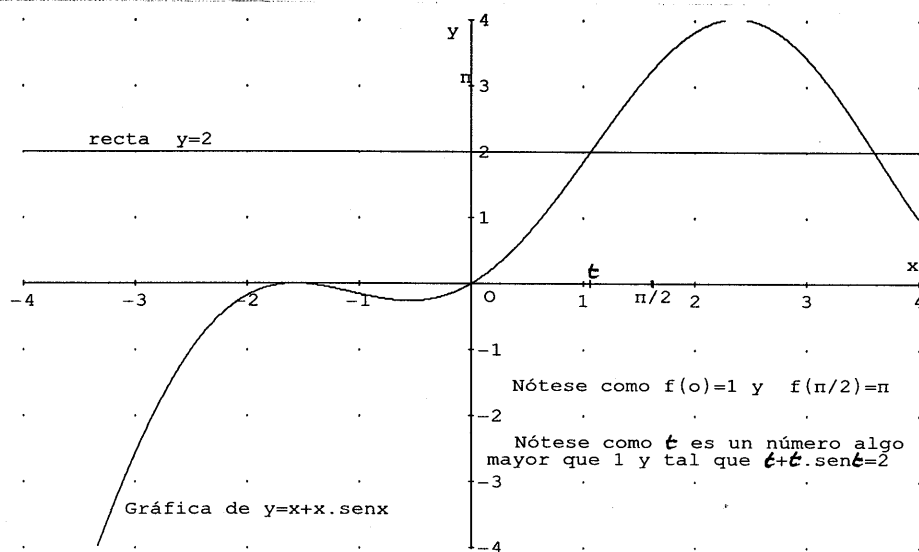
Es decir:

Para $c \in [f(0), f(\frac{\pi}{2})] = [0, \pi]$, intervalo situado en el eje de ordenadas, existe un número $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(t) = t + t \cdot \text{sen } t = c$

Por tanto: La función f toma el valor c para un $t \in (0, \frac{\pi}{2})$

Conclusión: La respuesta correcta es (b)

En la gráfica siguiente, que corresponde a la función $f(x) = x(1 + \sin x)$ puede apreciarse como corta a la recta $y=2$, es decir, existe un punto t tal que $f(t)=2$.



Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = \frac{2x}{b + |x|} \quad \text{con } b \in \mathbb{R}$$

Analizamos la alternativa a)

Nos dice que si tomamos un valor cualquiera para b , entonces $f(x)$ es discontinua en $x=-b$.

Veamos:

- Supongamos un número $b > 0$ (p.e. $b=5$).

Tenemos la función $f(x) = \frac{2x}{b + |x|}$ con $b > 0$

$$\text{Para } x = -b \Rightarrow f(-b) = \frac{2 \cdot (-b)}{b + |-b|} = \frac{-2b}{b+b} = \frac{-2b}{2b} = -1$$

↳ como $|-b| = b$

$$\text{Además, } \lim_{x \rightarrow -b} f(x) = \lim_{x \rightarrow -b} \frac{2x}{b + |x|} = \frac{-2b}{b + |-b|} = -1$$

Es decir: Cuando $b > 0$, la función $f(x)$ es continua en $x=-b$

Conclusión: la alternativa a) es FALSA.

Analizamos la alternativa b)

Nos dice que $f(x)$ es continua para cualquier $x \in \mathbb{R}$, sea el valor que sea b .

Veamos:

- Supongamos que $b < 0$ (p.e. $b = -5$)

Para $x = -b$ (que sea positivo) tenemos:

$$f(-b) = \frac{2 \cdot (-b)}{b + |-b|} = \frac{-2b}{b + (-b)} = \frac{-2b}{0} \notin \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow |-b| = -b$ ya que $b < 0$ y $-b > 0$

Es decir: Cuando $b < 0$, la función $f(x)$ no es continua en $x = -b$.

Conclusión: La alternativa b) es FALSA.

Analizamos la alternativa c).

Nos dice que si $b = 0$, $\exists x \in \mathbb{R} \mid f$ es discontinua en .

Veamos:

$$b = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{2x}{|x|}$$

$$\text{para } x = 0 \text{ tenemos que } f(0) = \frac{2 \cdot 0}{|0|} = \frac{0}{0} \notin \mathbb{R}$$

Es decir, $f(x)$ no es continua en $x = 0$, o sea, es discontinua en $x = 0$.

Conclusión final: La alternativa correcta es c)

Ejercicio nº 3.-

$$2.Lx = 2 - x \quad \text{ecuación}$$

Consideremos la ecuación de la forma $2.Lx + x - 2 = 0$

Consideremos la función $f(x) = 2.Lx + x - 2$

Observamos que Dominio de $f = D_f = (0, +\infty)$ ya que Lx solo está definido para $x \in \mathbb{R} \mid x > 0$

Las funciones $y = 2.Lx$ y $y = x - 2$ son estrictamente crecientes, por lo que la función $f(x) = 2.Lx + x - 2$ es estrictamente creciente.

Consideremos el intervalo $[1, 2]$ y veamos si en dicho intervalo la función $f(x)$ verifica el teorema de Bolzano:

$$\left. \begin{array}{l} f: [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = 2Lx + x - 2 \end{array} \right\} \text{continua en } [1, 2]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2L \cdot 1 + 1 - 2 = 2L + 1 - 2 = 2L - 1 < 0 \\ f(2) = 2L \cdot 2 + 2 - 2 = 4L > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{signo } f(1) \neq \text{signo } f(2)$$

$$\Rightarrow \exists c \in (1, 2) \text{ tal que } f(c) = 0$$

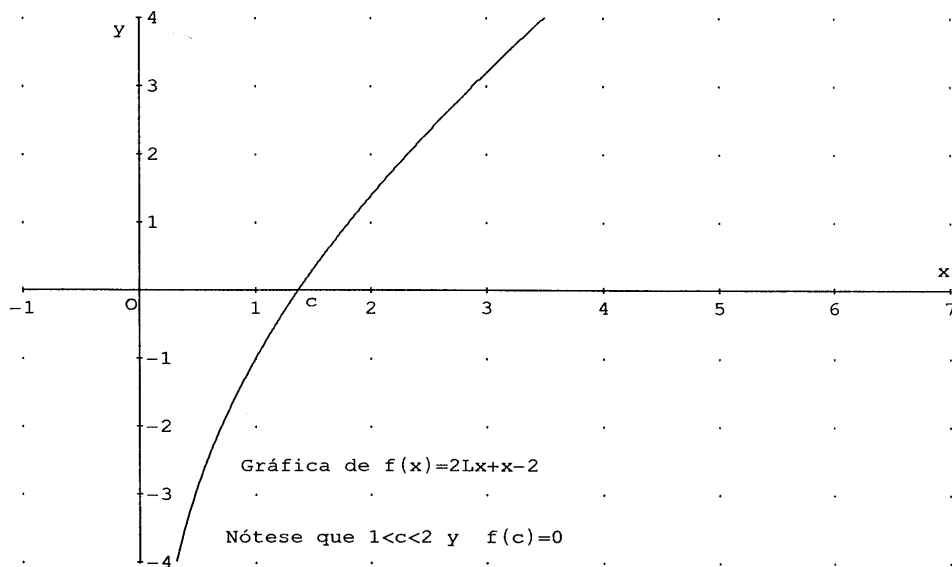
Es decir, existe $c \in (1, 2) \mid f(c) = 0$

$$2Lc + c - 2 = 0 \Rightarrow 2Lc = 2 - c \Rightarrow \text{La ecuación dada tiene un solución real.}$$

¿Es única la raíz?

Como la función $f(x)$ es estrictamente creciente, podemos asegurar que la función $f(x)$ corta al eje de abscisas en un único punto, es decir, en el punto $(c, 0)$. Es decir, c es la única raíz real de la ecuación.

Conclusión: La respuesta correcta es (a)



En la gráfica puede observarse la coherencia de la respuesta dada

Ejercicio nº 4.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} & \text{si } x \neq 64 \\ a & \text{si } x = 64 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=64$ debe ocurrir:

I) $f(64)$ existe

II) $\lim_{x \rightarrow 64} f(x) = l$ existe

III) $\lim_{x \rightarrow 64} f(x) = l = f(64)$

Veamos:

I) $f(64) = a$

II) $\lim_{x \rightarrow 64} f(x) = \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \frac{\sqrt{64}-8}{\sqrt[3]{64}-4} = \frac{8-8}{4-4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$

Salvemos la indeterminación:

llamamos $y^3 = x$. Entonces: $x \rightarrow 64 \Rightarrow y \rightarrow 4$

$$\lim_{x \rightarrow 64} f(x) = \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y \rightarrow 4} \frac{\sqrt{y^3}-8}{y-4} = \frac{\sqrt{4^3}-8}{4-4} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 64} f(x) = \lim_{y \rightarrow 4} \frac{\sqrt{y^3}-8}{y-4} = \lim_{y \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{y^3}-8) \cdot (\sqrt{y^3}+8)}{(y-4) \cdot (\sqrt{y^3}+8)} = \lim_{y \rightarrow 4} \frac{y^3-64}{(y-4)(\sqrt{y^3}+8)}$$

Efectuemos la división $y^3-64 : y-4$ por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & 0 & -64 & \text{constante } c(x) = y^2 + 4y + 16 \\ 4 & & 4 & 16 & 64 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 0 & \end{array} \quad y^3 - 64 = (y-4) \cdot (y^2 + 4y + 16)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 64} f(x) &= \lim_{y \rightarrow 4} \frac{y^3-64}{(y-4)(\sqrt{y^3}+8)} = \lim_{y \rightarrow 4} \frac{(y-4)(y^2+4y+16)}{(y-4)(\sqrt{y^3}+8)} = \lim_{y \rightarrow 4} \frac{y^2+4y+16}{\sqrt{y^3}+8} \\ &= \frac{4^2+4 \cdot 4+16}{\sqrt{4^3}+8} = \frac{16+16+16}{16} = \frac{3 \cdot 16}{16} = \underline{3} \end{aligned}$$

III) Para que $f(x)$ sea continua en $x=64$ debe ocurrir que

$$\lim_{x \rightarrow 64} f(x) = 3 = f(64) = a$$

Es decir: Si $a=3$, entonces $f(x)$ es continua en $x=64$

Conclusión: La alternativa correcta es **(b)**

Ejercicio nº 5

$$f(x) = \frac{x}{1+a \cdot |x|} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}$$

Analizamos la alternativa b)

- No dice que sea cual sea el valor de a , la función $f(x)$ es discontinua en $x = -\frac{1}{a}$ y en $x = \frac{1}{a}$. Además, son los únicos puntos donde $f(x)$ es discontinua.

Veamos:

Supongamos que $a > 0$. Entonces $f(x) = \frac{x}{1+a \cdot |x|}$

Consideremos el punto $x = -\frac{1}{a}$. Evidentemente $-\frac{1}{a} < 0$

Veamos si $f(x)$ es continua en $x = -\frac{1}{a}$

$$\text{I)} \quad f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{-\frac{1}{a}}{1+a \cdot \left|-\frac{1}{a}\right|} = \frac{-\frac{1}{a}}{1+a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{-\frac{1}{a}}{2} = -\frac{1}{2a} \in \mathbb{R}$$

$$\text{II)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{a}} \frac{x}{1+a|x|} = \frac{-\frac{1}{a}}{1+a \cdot \left|-\frac{1}{a}\right|} = \frac{-\frac{1}{a}}{1+a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{-\frac{1}{a}}{2} = -\frac{1}{2a}$$

$$\text{III)} \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{a}} f(x) = -\frac{1}{2a} = f\left(-\frac{1}{a}\right)$$

Es decir: $f(x)$ es continua en $x = -\frac{1}{a}$ cuando $a > 0$, es decir, no es discontinua en $x = -\frac{1}{a}$.

Por tanto: la alternativa b) es FALSA.

Analizamos las alternativas a) y c)

Nos hacemos la siguiente pregunta: si $a < 0$ (a negativo), hay algún punto x donde $f(x)$ sea discontinua?

Veamos:

$$a < 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1+a \cdot |x|}$$

$\hookrightarrow a = \text{negativo.}$

$$\text{Para } x = \frac{1}{a} < 0 \text{ tenemos que } f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{\frac{1}{a}}{1+a \cdot \left|\frac{1}{a}\right|} = \frac{\frac{1}{a}}{1+a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{\frac{1}{a}}{1-1} = \frac{1/a}{0} \notin \mathbb{R}$$

Es decir: si $a < 0$, hay algún punto donde $f(x)$ no es continua.

Veamos si cuando $a > 0$ $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

$$a > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1+a \cdot |x|}$$

$\hookrightarrow a > 0$

$$\forall k \in \mathbb{R} \text{ tenemos } \begin{cases} \textcircled{I} f(k) = \frac{k}{1+a \cdot |k|} = \frac{k}{1 + \text{n}^\circ \text{ positivo}} = \frac{k}{\text{n}^\circ \text{ positivo}} \in \mathbb{R} \\ \textcircled{II} \lim_{x \rightarrow k} f(x) = \lim_{x \rightarrow k} \frac{x}{1+a \cdot |x|} = \frac{k}{1+a \cdot |k|} = \frac{k}{\text{n}^\circ \text{ positivo}} = \text{existe} \\ \textcircled{III} \lim_{x \rightarrow k} f(x) = f(k) \end{cases}$$

Por tanto: Cuando $a > 0$, la función $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

¿Qué ocurre si $a = 0$? ¿Es $f(x)$ continua en todo \mathbb{R} ?

Veamos:

$$\text{Si } a = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1+0 \cdot |x|} = \frac{x}{1} = x \rightarrow \text{función continua en todo } \mathbb{R}.$$

Por tanto:

$$f(x) \text{ es continua en todo } \mathbb{R} \iff a \geq 0$$

Conclusión: La alternativa correcta es \textcircled{C}

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2002)

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \arctg\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$

en el punto $x = 0$ es:

- a) $y = x$
- b) $y = \frac{1}{2}x$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2002)

¿Para qué valores de a y b la función $f(x) = \begin{cases} -(2x + a) & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sin x + bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es derivable en \mathbb{R} ?

- a) $a = 1, b = 0$
- b) $a = 1, b = -1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2002)

Dada la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada segunda continua en \mathbb{R} y verificando que $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 4$, se define la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

El valor de $f'(0)$ es:

- a) $f'(0) = 2$
- b) $f'(0) = 4$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA29.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) \quad x=0$$

Determinemos el punto de la gráfica de $f(x)$ $P(0, f(0))$

$$f(0) = \arctan\left(\frac{\sin 0}{1 + \cos 0}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1+1}\right) = \arctan 0 = 0$$

Buscamos la ecuación de la recta r que es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(0,0)$.

$$r: \text{recta que } \left\{ \begin{array}{l} \text{para por el punto } P(0,0) \\ \text{tiene de pendiente } m = f'(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y - 0 = m \cdot (x - 0) \\ y = mx \end{array}$$

Necesitamos hallar la función derivada de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - (-\sin x) \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2 + \frac{\sin^2 x \cdot (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^2}} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x} = f'(x) \end{aligned}$$

Necesitamos hallar $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{\cos 0 + 1}{(1 + \cos 0)^2 + \sin^2 0} = \frac{1 + 1}{(1 + 1)^2 + 0^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = m = \text{pendiente de } r$$

Ecuación de r : $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$ → ecuación de la recta pedida.

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sin x + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Buscamos los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo \mathbb{R} .

Veamos:

- Para todo $x < -1$, la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = (-2x - a)' = -2$
Es decir, $f(x)$ es derivable en $(-\infty, -1)$ sea cual sea el valor de a y el valor de b .
- Para todo $x \in (-1, 0)$, $f'(x) = 2x$.
Es decir, $f(x)$ es derivable en $(-1, 0)$ sean cuales sean los valores de a y b .
- Para todo $x > 0$, $f'(x) = (\cos x + bx)' = -\sin x + b$
Es decir, $f(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$ sean cuales sean los valores de a y b .

Ahora bien:

Para ser derivable en los puntos $x = -1$ y en $x = 0$ hemos de suponer que a y b deben tomar unos valores concretos.

Veamos:

- Estudiemos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = -1$.

Derivada de $f(x)$ por la izquierda de -1 :

$$\begin{aligned} D^- f(-1) &= f'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(-1+h) - a - [-2(-1) - a]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - 2h - a - 2 + a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-2) = -2 \end{aligned}$$

Derivada de $f(x)$ por la derecha de -1 :

$$\begin{aligned} D^+ f(-1) &= f'(-1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-1+h)^2 - [-2(-1) - a]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h + 1 - 2 + a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h - 1 + a}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(h - 2 - \frac{1-a}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h - 2) - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-a}{h} = \\ &= -2 - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-a}{h} = \text{debe ser igual a } -2 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-a}{h} = 0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Conclusión: Para $a=1$ la función $f(x)$ es derivable en $x=-1$

• Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$

Derivada de $f(x)$ por la izquierda de 0:

$$\begin{aligned} D^-f(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} h = \underline{0} \end{aligned}$$

Derivada de $f(x)$ por la derecha de 0:

$$\begin{aligned} D^+f(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} h + b \cdot h - (\operatorname{sen} 0 + b \cdot 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} h + b \cdot h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} + b \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} b = \\ &= 1 + b = \text{debe ser igual a } 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

conclusión: Para $b = -1$ la función $f(x)$ es derivable en $x=0$

conclusión final: $\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \end{matrix}}$ La respuesta correcta es **(6)**

Ejercicio nº 3.

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que $g(0) = g'(0) = 0$

$$g''(0) = 4$$

$g''(x)$ existe y es continua en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Busquemos $f'(0)$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(h)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = \\ &= \frac{g(0)}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado.} \end{aligned}$$

Tenemos que calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2}$

Observamos que las funciones $g(h)$ y $f(h) = h^2$ son continuas y derivables, por lo que se cumplen las condiciones para aplicar L'Hôpital.

Entonces:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{(h^2)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h} = \frac{g'(0)}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterm.}$$

Como las funciones $g'(h)$ y $f'(h) = 2h$ son continuas y derivables, podemos aplicar nuevamente L'Hôpital:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{(2h)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{g''(0)}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

Por tanto: $\boxed{f'(0) = 2}$

Conclusión: La alternativa correcta es **(a)**

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2002)

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \arctg\left(\frac{\sen x}{1 + \cos x}\right)$

en el punto $x = 0$ es:

- a) $y = x$
- b) $y = \frac{1}{2}x$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2002)

¿Para qué valores de **a** y **b** la función $f(x) = \begin{cases} -(2x + a) & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sen x + bx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ es derivable en \mathbb{R} ?

- a) $a = 1, b = 0$
- b) $a = 1, b = -1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2002)

Dada la función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada segunda continua en \mathbb{R} y verificando que $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 4$, se define la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

El valor de $f'(0)$ es:

- a) $f'(0) = 2$
- b) $f'(0) = 4$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA29.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right) \quad x=0$$

Determinemos el punto de la gráfica de $f(x)$ $P(0, f(0))$

$$f(0) = \arctan\left(\frac{\sin 0}{1 + \cos 0}\right) = \arctan\left(\frac{0}{1+1}\right) = \arctan 0 = 0$$

Buscamos la ecuación de la recta r que es tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(0,0)$.

$$r: \text{recta que } \left\{ \begin{array}{l} \text{para por el punto } P(0,0) \\ \text{tiene de pendiente } m = f'(0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y - 0 = m \cdot (x - 0) \\ y = mx \end{array}$$

Necesitamos hallar la función derivada de $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x \cdot (1 + \cos x) - (-\sin x) \cdot \sin x}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2 + \frac{\sin^2 x \cdot (1 + \cos x)^2}{(1 + \cos x)^2}} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2 + \sin^2 x} = f'(x) \end{aligned}$$

Necesitamos hallar $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{\cos 0 + 1}{(1 + \cos 0)^2 + \sin^2 0} = \frac{1 + 1}{(1 + 1)^2 + 0^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = m = \text{pendiente de } r$$

Ecuación de r : $\boxed{y = \frac{1}{2}x}$ \rightarrow ecuación de la recta pedida.

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \sin x + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Buscamos los valores de a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo \mathbb{R} .

Veamos:

- Para todo $x < -1$, la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = (-2x - a)' = -2$
Es decir, $f(x)$ es derivable en $(-\infty, -1)$ sea cual sea el valor de a y el valor de b .
- Para todo $x \in (-1, 0)$, $f'(x) = 2x$.
Es decir, $f(x)$ es derivable en $(-1, 0)$ sean cuales sean los valores de a y b .
- Para todo $x > 0$, $f'(x) = (\cos x + bx)' = -\sin x + b$
Es decir, $f(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$ sean cuales sean los valores de a y b .

Ahora bien:

Para ser derivable en los puntos $x = -1$ y en $x = 0$ hemos de suponer que a y b deben tomar unos valores concretos.

Veamos:

- Estudiemos la derivabilidad de $f(x)$ en $x = -1$.

Derivada de $f(x)$ por la izquierda de -1 :

$$\begin{aligned} D^- f(-1) &= f'(-1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(-1+h) - a - [-2(-1) - a]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - 2h - a - 2 + a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-2) = -2 \end{aligned}$$

Derivada de $f(x)$ por la derecha de -1 :

$$\begin{aligned} D^+ f(-1) &= f'(-1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-1+h)^2 - [-2(-1) - a]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h + 1 - 2 + a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 2h - 1 + a}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(h - 2 - \frac{1-a}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (h - 2) - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-a}{h} = \\ &= -2 - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-a}{h} = \text{debe ser igual a } -2 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1-a}{h} = 0 \Rightarrow 1-a=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Conclusión: Para $a=1$ la función $f(x)$ es derivable en $x=-1$

• Estudiamos la derivabilidad de $f(x)$ en $x=0$

Derivada de $f(x)$ por la izquierda de 0:

$$\begin{aligned} D^-f(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} h = \underline{0} \end{aligned}$$

Derivada de $f(x)$ por la derecha de 0:

$$\begin{aligned} D^+f(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} h + b \cdot h - (\operatorname{sen} 0 + b \cdot 0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} h + b \cdot h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} + b \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} b = \\ &= 1 + b = \text{debe ser igual a } 0 \Rightarrow 1 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -1} \end{aligned}$$

conclusión: Para $b=-1$ la función $f(x)$ es derivable en $x=0$

conclusión final: $\boxed{\begin{matrix} a=1 \\ b=-1 \end{matrix}}$ La respuesta correcta es **(6)**

Ejercicio nº 3.

$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sabemos que $g(0) = g'(0) = 0$

$$g''(0) = 4$$

$g''(x)$ existe y es continua en todo \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Busquemos $f'(0)$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{g(h)}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = \\ &= \frac{g(0)}{0^2} = \frac{0}{0} = \text{indeterminado.} \end{aligned}$$

Tenemos que calcular $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2}$

Observamos que las funciones $g(h)$ y $f(h) = h^2$ son continuas y derivables, por lo que se cumplen las condiciones para aplicar L'Hôpital.

Entonces:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{(h^2)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h} = \frac{g'(0)}{2 \cdot 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterm.}$$

Como las funciones $g'(h)$ y $f'(h) = 2h$ son continuas y derivables, podemos aplicar nuevamente L'Hôpital:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{(2h)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{g''(0)}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$$

Por tanto: $\boxed{f'(0) = 2}$

Conclusión: La alternativa correcta es **(a)**

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2002)

Sea g una función derivable en \mathbb{R} verificando que $g(0) = g'(0) = 2$.

Se define, para todo $x \geq 0$, la función $f(x) = g^3(\arctg(\sqrt{x} - 1))$

El valor de $f'(1)$ es:

- a) 4
- b) 12
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2002)

Sean $h, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables que verifican:

$$g(0) = 0 ; g'(0) = 1 ; h(1) = \frac{1}{4} \text{ y } h'(1) = 3$$

Se define la función $f(x) = h^2(1 - g(4x))$

El valor de $f'(0)$ es:

- a) $f'(0) = -6$
- b) $f'(0) = \frac{3}{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

El límite de la función $f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0^+$ es:

- a) 0
- b) 1
- c) $+\infty$

Ejercicio nº 4.-

Sea la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$ y la recta r de ecuación $y = \frac{3}{2}x + 5$

Entonces:

- a) Existe un $c \in (1, 2)$ tal que la recta tangente a la gráfica en el punto $P(c, f(c))$ es paralela a la recta r .
- b) En ningún punto de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a r .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

$g(x)$ función derivable en \mathbb{R} tal que $g(0) = g'(0) = 2$

Definimos $f(x) = g^3(\arctg(\sqrt{x}-1)) \quad \forall x \geq 0$

Hallemos $f'(1)$

Veamos:

Llamamos $t = \arctg(\sqrt{x}-1)$ que es una función dependiente de x

Entonces: $f(x) = g^3(t)$

Hallemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 3g^2(t) \cdot \frac{dg}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3g^2(t) \cdot g'(t) \cdot t'(x)$$

para $x=1$ tenemos que $t = \arctg(\sqrt{1}-1) = \arctg 0 = 0$

$$\text{Entonces } f'(1) = 3 \cdot g^2(0) \cdot g'(0) \cdot t'(1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot t'(1) = 24 \cdot t'(1)$$

Necesitamos hallar $t'(1)$

$$\text{Ante, hallemos } t'(x): t'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x}-1)^2} \cdot (\sqrt{x}-1)' = \frac{1}{1+(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$t'(1) = \frac{1}{1+(\sqrt{1}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Por tanto: } f'(1) = 24 \cdot t'(1) = 24 \cdot \frac{1}{2} = \underline{12} \quad \boxed{f'(1) = 12}$$

conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 2.-

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable en todo $\mathbb{R} \mid g(0)=0$ y $g'(0)=1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable en todo $\mathbb{R} \mid h(1)=\frac{1}{4}$ y $h'(1)=3$

Definimos la función $f(x) = h^2(1-g(4x))$

Hallemos $f'(0)$.

Veamos:

Llamamos $u = 4x \rightarrow u$ es una función de x .

$t = 1 - g(u) = 1 - g(4x) \rightarrow t$ es una función de x .

Tenemos: $f(x) = h^2(t)$

Hallemos $f'(x)$, es decir, la derivada de f respecto de x :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2 \cdot h(t) \cdot \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \cdot h(t) \cdot \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

↳ como t depende de u y u depende de x

$$f'(x) = 2 \cdot h(t) \cdot h'(t) \cdot t'(u) \cdot u'(x)$$

Para $x=0$ tenemos $f'(0)$

Veamos los distintos valores para $x=0$:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u(x)=4x \Rightarrow u(0)=4 \cdot 0=0 \\ u'(x)=4 \Rightarrow u'(0)=4 \\ t(u(x))=t(u(0))=t(0)=1-g(0)=1-0=1 \\ h'(t) \text{ para } t=1 \text{ es } h'(1)=3 \\ t'(u)=[1-g(u)]'=-g'(u). \text{ Para } u=0 \text{ es } t'(0)=-g'(0)=-1 \\ h(t) \text{ para } t=1 \text{ es } h(1)=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Por tanto:

$$f'(0) = 2 \cdot h(1) \cdot h'(1) \cdot t'(0) \cdot u'(0) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 4 = -6$$

$$\boxed{f'(0) = -6} \Rightarrow \text{La alternativa correcta es } \textcircled{a}$$

Ejercicio n° 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2} = \frac{\sqrt{\sin 0^+}}{(0^+)^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Salvemos la indeterminación:

Se cumplen las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{\sin x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{4x \cdot \sqrt{\sin x}} = \frac{\cos 0^+}{4 \cdot 0^+ \cdot \sqrt{\sin 0^+}} = \frac{1}{4 \cdot 0^+ \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

conclusión: La alternativa correcta es \textcircled{c}

Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 \quad \text{función derivable en todo } \mathbb{R}$$

$$g = \frac{3}{2}x + 5 \quad \text{recta, cuya pendiente es } m = \frac{3}{2}$$

Busquemos un punto $P(c, f(c))$ de la gráfica de $f(x)$ cuya pendiente sea $\frac{3}{2}$.

$$\text{Es decir: } f'(c) = m = \frac{3}{2}$$

Veamos:

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 8 = \frac{3}{2}$$

$$12x^2 - 20x + 16 = 3 \quad ; \quad 12x^2 - 20x + 13 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 12 \cdot 13}}{24} = \frac{20 \pm \sqrt{-224}}{24} \notin \mathbb{R}$$

Es decir:

$$\nexists c \in \mathbb{R} \mid f'(c) = \frac{3}{2}$$

Es decir: "En ningún punto de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $g = \frac{3}{2}x + 5$."

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2002)

Sea g una función derivable en \mathbb{R} verificando que $g(0) = g'(0) = 2$.

Se define, para todo $x \geq 0$, la función $f(x) = g^3(\arctg(\sqrt{x} - 1))$

El valor de $f'(1)$ es:

- a) 4
- b) 12
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2002)

Sean $h, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables que verifican:

$$g(0) = 0 ; g'(0) = 1 ; h(1) = \frac{1}{4} \text{ y } h'(1) = 3$$

Se define la función $f(x) = h^2(1 - g(4x))$

El valor de $f'(0)$ es:

- a) $f'(0) = -6$
- b) $f'(0) = \frac{3}{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

El límite de la función $f(x) = \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2}$ cuando $x \rightarrow 0^+$ es:

- a) 0
- b) 1
- c) $+\infty$

Ejercicio nº 4.-

Sea la función $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3$ y la recta r de ecuación $y = \frac{3}{2}x + 5$

Entonces:

- a) Existe un $c \in (1, 2)$ tal que la recta tangente a la gráfica en el punto $P(c, f(c))$ es paralela a la recta r .
- b) En ningún punto de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a r .
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

$g(x)$ función derivable en \mathbb{R} tal que $g(0) = g'(0) = 2$

Definimos $f(x) = g^3(\arctg(\sqrt{x}-1)) \quad \forall x \geq 0$

Hallemos $f'(1)$

Veamos:

Llamamos $t = \arctg(\sqrt{x}-1)$ que es una función dependiente de x

Entonces: $f(x) = g^3(t)$

Hallemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 3g^2(t) \cdot \frac{dg}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3g^2(t) \cdot g'(t) \cdot t'(x)$$

para $x=1$ tenemos que $t = \arctg(\sqrt{1}-1) = \arctg 0 = 0$

$$\text{Entonces } f'(1) = 3 \cdot g^2(0) \cdot g'(0) \cdot t'(1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot t'(1) = 24 \cdot t'(1)$$

Necesitamos hallar $t'(1)$

$$\text{Ante, hallemos } t'(x): t'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x}-1)^2} \cdot (\sqrt{x}-1)' = \frac{1}{1+(\sqrt{x}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$t'(1) = \frac{1}{1+(\sqrt{1}-1)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Por tanto: } f'(1) = 24 \cdot t'(1) = 24 \cdot \frac{1}{2} = \underline{12} \quad \boxed{f'(1) = 12}$$

conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 2.-

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable en todo $\mathbb{R} \mid g(0)=0$ y $g'(0)=1$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función derivable en todo $\mathbb{R} \mid h(1)=\frac{1}{4}$ y $h'(1)=3$

Definimos la función $f(x) = h^2(1-g(4x))$

Hallemos $f'(0)$.

Veamos:

Llamamos $u = 4x \rightarrow u$ es una función de x .

$t = 1 - g(u) = 1 - g(4x) \rightarrow t$ es una función de x .

Tenemos: $f(x) = h^2(t)$

Halleamos $f'(x)$, es decir, la derivada de f respecto de x :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = 2 \cdot h(t) \cdot \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2 \cdot h(t) \cdot \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

↳ como t depende de u y u depende de x

$$f'(x) = 2 \cdot h(t) \cdot h'(t) \cdot t'(u) \cdot u'(x)$$

Para $x=0$ tenemos $f'(0)$

Veamos los distintos valores para $x=0$:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} u(x)=4x \Rightarrow u(0)=4 \cdot 0=0 \\ u'(x)=4 \Rightarrow u'(0)=4 \\ t(u(x))=t(u(0))=t(0)=1-g(0)=1-0=1 \\ h'(t) \text{ para } t=1 \text{ es } h'(1)=3 \\ t'(u)=[1-g(u)]'=-g'(u). \text{ Para } u=0 \text{ es } t'(0)=-g'(0)=-1 \\ h(t) \text{ para } t=1 \text{ es } h(1)=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Por tanto:

$$f'(0) = 2 \cdot h(1) \cdot h'(1) \cdot t'(0) \cdot u'(0) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 4 = -6$$

$$\boxed{f'(0) = -6} \Rightarrow \text{La alternativa correcta es } \textcircled{a}$$

Ejercicio n° 3

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2} = \frac{\sqrt{\sin 0^+}}{(0^+)^2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Salvemos la indeterminación:

Se cumplen las condiciones para aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{\sin x})'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{4x \cdot \sqrt{\sin x}} = \frac{\cos 0^+}{4 \cdot 0^+ \cdot \sqrt{\sin 0^+}} = \frac{1}{4 \cdot 0^+ \cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

conclusión: La alternativa correcta es \textcircled{c}

Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8x - 3 \quad \text{función derivable en todo } \mathbb{R}$$

$$g = \frac{3}{2}x + 5 \quad \text{recta, cuya pendiente es } m = \frac{3}{2}$$

Busquemos un punto $P(c, f(c))$ de la gráfica de $f(x)$ cuya pendiente sea $\frac{3}{2}$.

$$\text{Es decir: } f'(c) = m = \frac{3}{2}$$

Veamos:

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 8 = \frac{3}{2}$$

$$12x^2 - 20x + 16 = 3 \quad ; \quad 12x^2 - 20x + 13 = 0$$

$$x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 12 \cdot 13}}{24} = \frac{20 \pm \sqrt{-224}}{24} \notin \mathbb{R}$$

Es decir:

$$\nexists c \in \mathbb{R} \mid f'(c) = \frac{3}{2}$$

Es decir: "En ningún punto de la gráfica de $f(x)$ la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $g = \frac{3}{2}x + 5$."

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2001/02

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Fórmula de Taylor. Aplicaciones . Estudio local de funciones.

Código: ACANMA31.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2002)

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2}$, todos los valores donde f tiene un máximo o mínimo relativo son:

- a) $x = -1$
- b) $x = -1$ y $x = 0$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2002)

Todos los valores de x donde la función $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$ tiene un máximo o mínimo relativo son:

- a) $x = 0$; $x = 1$ y $x = 3$
- b) $x = 1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

La función $f(x) = (x - 1) \sqrt[3]{x^2}$ alcanza un:

- a) Máximo relativo para un valor de x comprendido entre 0 y 1.
- b) Mínimo relativo para un valor de x comprendido entre 0 y 1.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.-

Dada la función $f(x) = (x - 1)^3$ verifica que:

- a) En el punto $x = 1$ tiene un máximo relativo.
- b) En el punto $x = 1$ tiene un mínimo relativo.
- c) En el punto $x = 1$ tiene un punto de inflexión.

Ejercicio nº 5.-

La función $f(x) = x - Lx$ es:

- a) Creciente en todo el intervalo $(0, +\infty)$
- b) Decreciente en todo el intervalo $(0, +\infty)$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

$$\left. \begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = \sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2} \end{array} \right\}$$

Hallemos los extremos de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{12x^3 + 12x^2}{2\sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2}} = \frac{6x^3 + 6x^2}{\sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2}} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 6x^3 + 6x^2 &= 0 \\ x^3 + x^2 &= 0 \\ x^2(x+1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Es decir:

En $x=-1$ y en $x=0$ puede haber extremos. Son los únicos puntos donde puede haberlos

- Veamos que ocurre en $x=-1$

Necesitamos hallar $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{(12x^2 + 12x) \cdot \sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2} - \frac{12x^3 + 12x^2}{2\sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2}} \cdot (6x^3 + 6x^2)}{3x^4 + 4x^3 + 2}$$

$$f''(-1) = \frac{6 \cdot \sqrt{1} - 0}{1} = 6 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x=-1 \text{ hay un mínimo}}$$

- Veamos que ocurre en $x=0$

$$f''(0) = \frac{0 \cdot \sqrt{2} - \frac{0 \cdot 0}{2 \cdot \sqrt{2}}}{2} = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \text{No podemos decir si en } x=0 \text{ hay un extremo.}$$

Veamos si el signo de $f'(x)$ cambia al pasar de 0^- a 0^+

$$f'(0^-) = \frac{6 \cdot (0^-)^3 + 6 \cdot (0^-)^2}{\sqrt{3 \cdot (0^-)^4 + 4 \cdot (0^-)^3 + 2}} = \frac{\text{NEGATIVO} + \text{POSITIVO}}{\sqrt{\text{POSITIVO}}} = \frac{\text{POSITIVO}}{\text{POSITIVO}} = \text{POSITIVO}$$

$$f'(0^+) = \frac{6 \cdot (0^+)^3 + 6 \cdot (0^+)^2}{\sqrt{3 \cdot (0^+)^4 + 4 \cdot (0^+)^3 + 2}} = \frac{\text{POSITIVO}}{\text{POSITIVO}} = \text{POSITIVO}$$

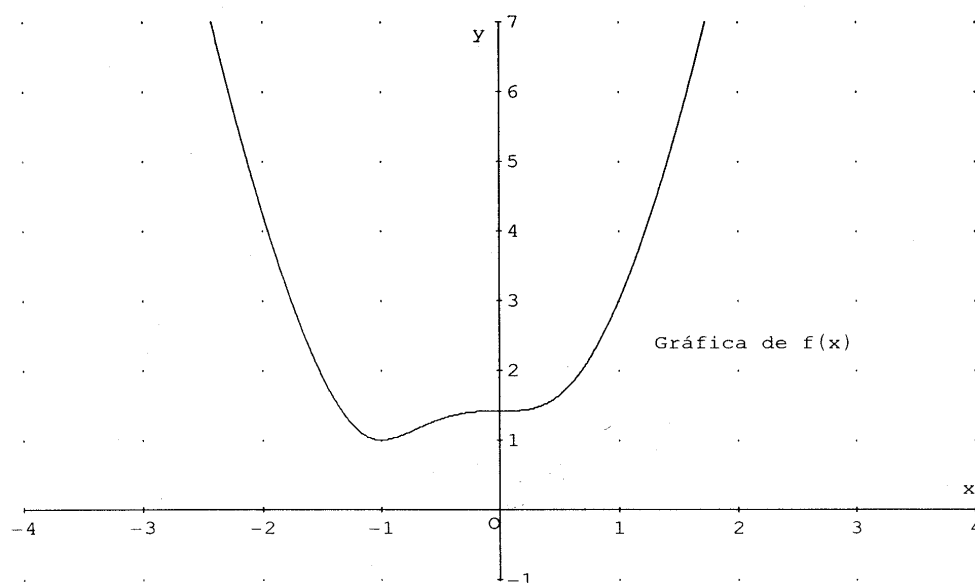
↳ ya que $|6 \cdot (0^-)^2| > |6 \cdot (0^-)^3|$

Esto nos indica que en $x=0$ hay punto de inflexión y que $f(x)$ es creciente

Conclusión final: Hay un mínimo en $x=-1$ y no hay más extremos.

Por tanto: la alternativa correcta es (a)

Vemos la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{3x^4 + 4x^3 + 2}$



Puede apreciarse como en $x=-1$ hay un mínimo y en $x=0$ hay inflexión.

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$$

Intentemos hallar los extremos de $f(x)$:

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$$

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \begin{cases} \boxed{x=3} \\ \boxed{x=1} \end{cases} \end{cases}$$

Por tanto: En $x=0$; $x=1$ y $x=3$ posibles extremos

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x \quad ; \quad f'''(x) = 60x^2 - 120x + 30$$

• Para $x=0$ tenemos $f''(0) = 0$

$$f'''(0) = 30 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x=0 \text{ hay punto de inflexión}}$$

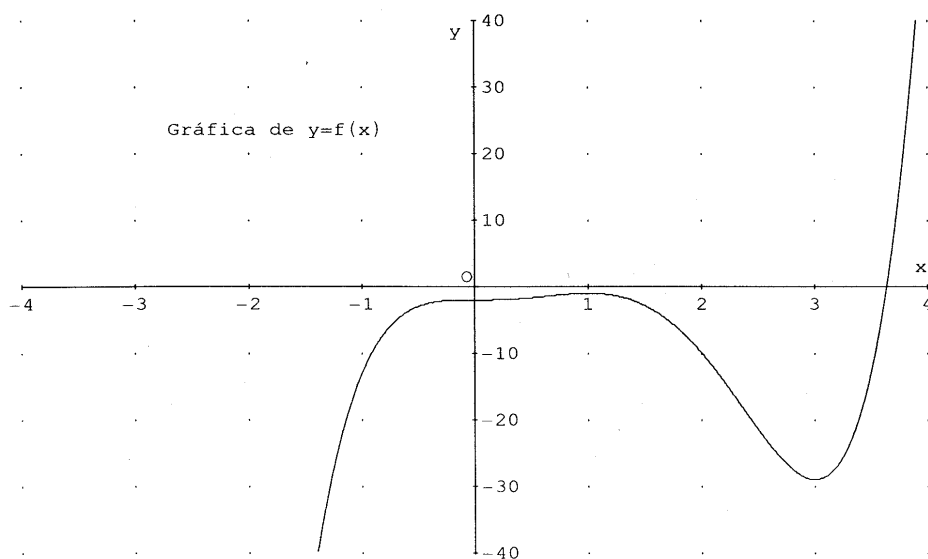
• Para $x=1$ tenemos $f''(1) = 20 - 60 + 30 = -10 < 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x=1 \text{ hay máximo}}$

• Para $x=3$ tenemos $f''(3) = 540 - 540 + 90 = 90 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x=3 \text{ hay mínimo}}$

Concluimos: En $x=1$ hay máximo, en $x=3$ hay mínimo y no hay mas extremos.

Por tanto: la alternativa correcta es (C)

Veamos la gráfica de $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 2$



Puede apreciarse como en $x=1$ hay máximo, en $x=3$ hay mínimo y en $x=0$ hay inflexión.

Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = (x-1) \cdot \sqrt[3]{x^2} = (x-1) \cdot x^{\frac{2}{3}}$$

Intentemos hallar los extremos de $f(x)$:

$$f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{2}{3}} + (x-1) \cdot \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} (x-1) x^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = -\frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$3\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x} = -2x + 2$$

$$3\sqrt[3]{x^3} = -2x + 2 ; 3x + 2x = 2 ; 5x = 2 ; \boxed{x = \frac{2}{5} = 0.4}$$

En $x = \frac{2}{5} = 0.4$ posible extremo.

$$f''(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} (x-1) \cdot \frac{-1}{3} x^{-\frac{1}{3}-1} =$$

Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = (x-1)^3$$

Veamos que ocurre en $x=1$:

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

\hookrightarrow posible extremo.

$$f''(x) = 6(x-1)$$

$$\text{para } x=1 \text{ tenemos que } f''(1) = 6 \cdot (1-1) = 6 \cdot 0 = 0$$

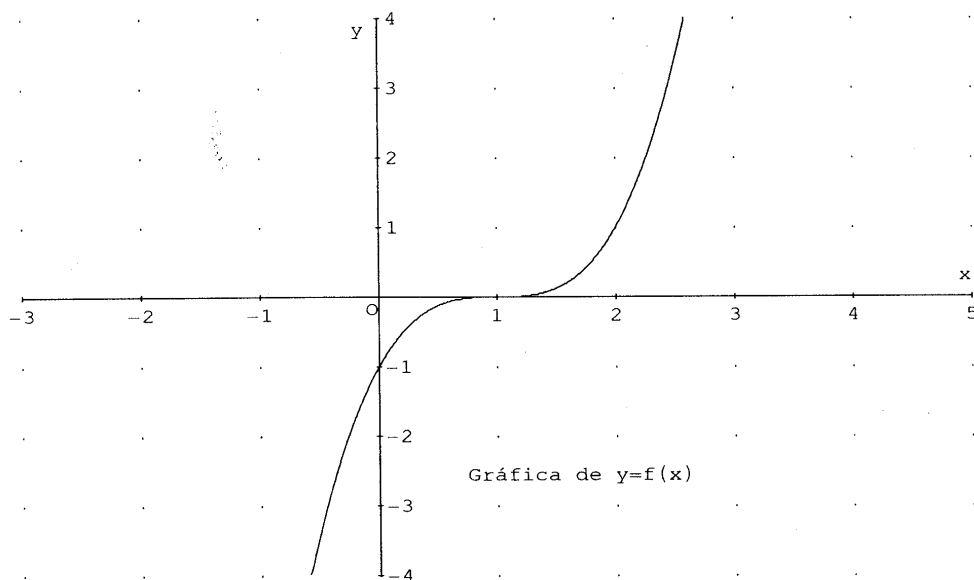
Aún no podemos asegurar nada.

$$\text{Hallamos la tercera derivada: } f'''(x) = 6$$

$$\text{para } x=1 \text{ tenemos que } f'''(1) = 6 \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x=1 \text{ hay inflexión}}$$

Por tanto: La alternativa correcta es (C)

Construimos la gráfica de $f(x) = (x-1)^3$



Notare como en el punto $(1,0)$ la gráfica hace una inflexión.

Ejercicio nº 5.-

$$f(x) = x - Lx$$

El dominio de $f(x)$ es $D_f = (0, +\infty)$ ya que Lx sólo está definido en $(0, +\infty)$.

Estudiemos el crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x - Lx$

Sabemos que:

- En los puntos x donde $f'(x) \geq 0$, la función $f(x)$ es creciente.
- En los puntos x donde $f'(x) \leq 0$, la función $f(x)$ es decreciente

Veamos:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

¿Donde es $f'(x) \geq 0$?

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$1 \geq \frac{1}{x} \quad \text{Como } x \in (0, +\infty), \text{ esto es, } x > 0$$

$$\boxed{x \geq 1}$$

↳ Es decir: Si $x \geq 1$ entonces $f'(x) \geq 0$

Por tanto: $f(x)$ es creciente en el intervalo $[1, +\infty)$

¿Donde es $f'(x) \leq 0$?

$$1 - \frac{1}{x} \leq 0$$

$$1 \leq \frac{1}{x} \quad \text{Como } x \in (0, +\infty), \text{ esto es, } x > 0$$

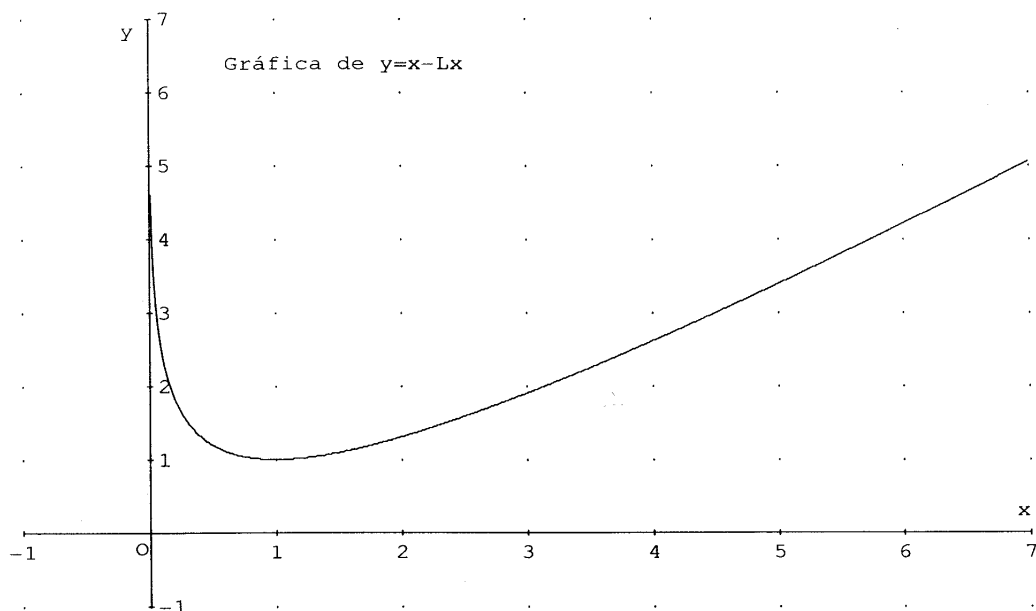
$$\boxed{x \leq 1}$$

↳ Es decir: Si $x \leq 1$, entonces $f'(x) \leq 0$

Por tanto: $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 1]$

Por tanto: $\left. \begin{array}{l} \text{No es creciente en todo } (0, +\infty) \\ \text{No es decreciente en todo } (0, +\infty) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{la respuesta es } \textcircled{C}$

Representemos la función $f(x) = x - Lx$



Notese como en $x=1$ hay un mínimo, ya que $f'(1)=0$ y $f''(1)>0$

Ejercicio nº 1.-

La función $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x}$:

- a) Es decreciente en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ y convexa hacia abajo en el $[0, \pi]$
- b) Es creciente en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $[0, \pi]$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.-

La función $f(x) = 2(x-1)^4$ en $x=1$ tiene un:

- a) Punto de inflexión.
- b) Máximo.
- c) Mínimo.

Ejercicio nº 3.-

La función $f(x) = (x+1)e^x$ tiene:

- a) Un máximo y un punto de inflexión.
- b) Un mínimo y un punto de inflexión.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.-

La función $f(x) = (x+1)e^x$ es:

- a) Cóncava hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -3)$ y convexa hacia abajo en $(-3, \infty)$.
- b) Convexa hacia abajo en el intervalo $(-\infty, -3)$ y cóncava hacia abajo en $(-3, \infty)$.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 5.-

La función $f(x) = [Lx]^3$ verifica:

- a) En $x=1$ hay inflexión que pasa de convexa hacia abajo a cóncava hacia abajo.
- b) En $x=1$ hay inflexión que pasa de cóncava hacia abajo a convexa hacia abajo.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

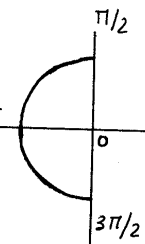
Ejercicio nº 1.-

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x}$$

• Demos una respuesta a la alternativa a)

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot (2 + \sin x) - \cos x \cdot \sin x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{2 \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin x}{(2 + \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2}$$

$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, es decir,  tenemos que
$$\begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \text{y} \\ 2 + \sin x > 0 \end{cases}$$

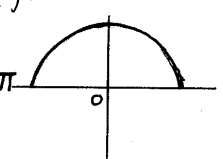
Por tanto:

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ es } \begin{cases} 2 \cdot \cos x \leq 0 \\ \text{y} \\ (2 + \sin x)^2 > 0 \end{cases} \text{ luego: } f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{(2 + \sin x)^2} \leq 0$$

Es decir: En $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ la función $f(x)$ es decreciente

Estudiamos la concavidad-convexidad en el intervalo $[0, \pi]$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2 \cdot \sin x \cdot (2 + \sin x)^2 - 2 \cdot (2 + \sin x) \cdot \cos x \cdot 2 \cos x}{(2 + \sin x)^4} = \\ &= \frac{-2 \cdot \sin x \cdot (2 + \sin x) - 4 \cdot \cos^2 x}{(2 + \sin x)^3} = \frac{-4 \sin x - 2 \sin^2 x - 4 \cos^2 x}{(2 + \sin x)^3} = \\ &= \frac{-4 \sin x - 2(\sin^2 x + 2 \cdot \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^3} = \frac{-4 \sin x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^3} = \\ &= \frac{-4 \sin x - 2(1 + \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^3} \end{aligned}$$

$\forall x \in [0, \pi]$, es decir,  tenemos que
$$\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \text{y} \\ 1 + \cos^2 x > 0 \\ \text{y} \\ 2 + \sin x > 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$\forall x \in [0, \pi] \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cdot \sin x \geq 0 \\ 2 \cdot (1 + \cos^2 x) > 0 \\ (2 + \sin x)^3 > 0 \end{cases} \text{ luego } f''(x) = \frac{-4 \sin x - 2(1 + \cos^2 x)}{(2 + \sin x)^3} \leq 0$

Es decir:

$\forall x \in [0, \pi]$ oare $f''(x) \leq 0$


Concluimos que: $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $[0, \pi]$.
 $f(x)$ no es convexa hacia abajo en $[0, \pi]$.

Le alternative a) e FALSA.

- Demos una respuesta a la alternativa b)
¿Es $f(x)$ creciente en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$?

Veramos :

$$f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{(2 + \tan x)^2}$$

$f(x) = \frac{1}{(2 + \cos x)^2}$
 $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, e, de ar, 
tenemos, que $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ y \\ 2 + \cos x > 0 \end{cases}$

Por tentos:

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ en } \begin{cases} 2 \cdot \cos x \geq 0 \\ (2 + \tan x)^2 > 0 \end{cases} \text{ luego: } f'(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{(2 + \tan x)^2} \geq 0$$

Es decir:

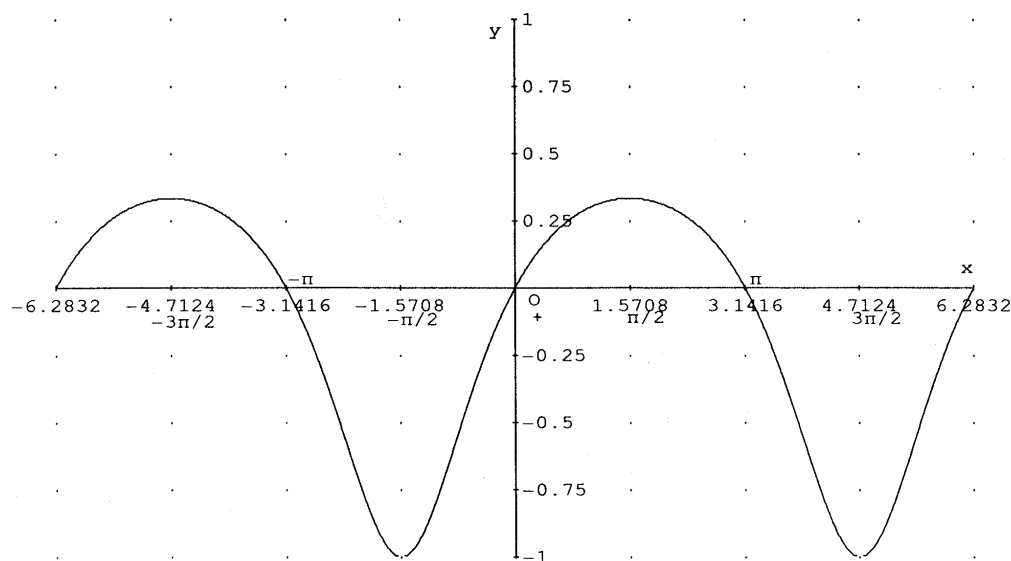
Es decir: En $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la función $f(x)$ es creciente.

En el estudio del apartado a) vimos que $f(x)$ es cóncava hacia abajo en el intervalo $[0, \pi]$

Par tanto:

* $f(x)$ es creciente en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
* $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $[0, \pi]$ } \Rightarrow La respuesta es (b)

Dibujemos la gráfica de $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x}$ para comprobar los resultados:



En la gráfica podemos apreciar:

- En $x = -\frac{\pi}{2}$ hay MÍNIMO
- En $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es CRECIENTE
- En $x = \frac{\pi}{2}$ hay MÁXIMO
- En $[0, \pi]$ es CONCAVA HACIA ABATO

cumple la alternativa (b)

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = 2 \cdot (x-1)^4$$

$$f'(x) = 8(x-1)^3. \text{ Para } x=1 \text{ es } f'(1)=0 \Rightarrow \text{Puede haber } \begin{cases} \text{MÁXIMO} \\ \text{MÍNIMO} \\ \text{INFLEXIÓN} \end{cases}$$

$$f''(x) = 24(x-1)^2. \text{ Para } x=1 \text{ es } f''(1)=0 \Rightarrow \text{Puede haber } \begin{cases} \text{MÁXIMO} \\ \text{MÍNIMO} \\ \text{INFLEXIÓN} \end{cases}$$

$$f'''(x) = 48(x-1). \text{ Para } x=1 \text{ es } f'''(1)=0 \Rightarrow \text{Puede haber } \begin{cases} \text{MÁXIMO} \\ \text{MÍNIMO} \\ \text{INFLEXIÓN} \end{cases}$$

$$f^{(iv)}(x) = 48$$

$$f^{(iv)}(1) = 48 > 0$$

grado de la derivada = PAR

$$\left. \begin{matrix} f^{(iv)}(1) = 48 > 0 \\ \text{grado de la derivada} = \text{PAR} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{En } x=1 \text{ hay MÍNIMO}}$$

conclusión: La alternativa correcta es (c)

Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$

- Hallamos los extremos de $f(x)$

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x = e^x + (x+1) \cdot e^x$$

$$f'(x) = 0 ; e^x + (x+1) \cdot e^x = 0$$

$$(x+1) \cdot e^x = -e^x$$

$$x+1 = -1 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

↳ En $x = -2$ posible extremo

$$f''(x) = e^x + e^x + (x+1) \cdot e^x$$

$$f''(x) = 2e^x + (x+1) \cdot e^x$$

$$f''(-2) = 2 \cdot e^{-2} - e^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} > 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x = -2 \text{ hay MÍNIMO}}$$

Ya sabemos que la alternativa a) es FALSA

- Hallamos los puntos de inflexión de $f(x)$

$$f''(x) = 0$$

$$2e^x + (x+1)e^x = 0 ; (x+1) \cdot e^x = -2e^x ; x+1 = -2 ; \boxed{x = -3}$$

↳ posible inflexión

$$f'''(x) = 2e^x + e^x + (x+1)e^x = 3e^x + (x+1)e^x$$

$$f'''(-3) = 3 \cdot e^{-3} - 2e^{-3} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{En } x = -3 \text{ hay INFLEXIÓN}}$$

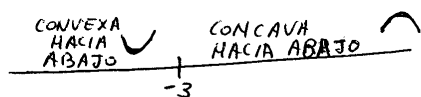
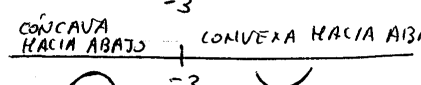
Conclusión: La alternativa correcta es (b)

Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = (x+1) \cdot e^x$$

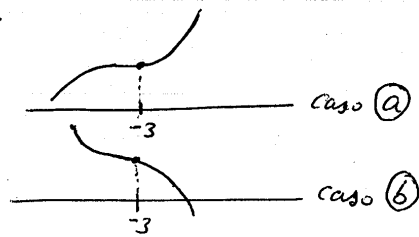
En el ejercicio anterior hemos visto que en $x = -3$ hay un punto de inflexión.

Esto significa que:

- O bien ocurre que $f(x)$ es  opción b)
- O bien ocurre que $f(x)$ es  opción a)

La forma de verla es la siguiente:

- Si $f'''(-3) > 0$ estamos en el caso
- Si $f'''(-3) < 0$ estamos en el caso

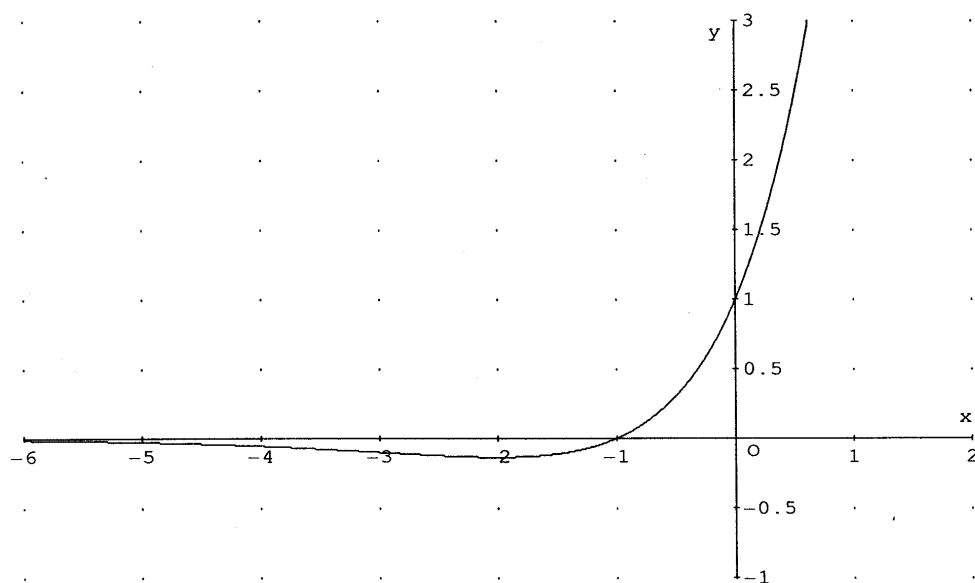


En nuestro caso tenemos:

$$f'''(-3) = e^{-3} = \frac{1}{e^3} > 0 \Rightarrow \text{Estamos en el caso (a)}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Dibujemos la gráfica de $f(x) = (x+1)e^x$ para comprobar los resultados obtenidos en este ejercicio y en el anterior:



En la gráfica observamos que:

- En $x = -2$ hay un mínimo
- En $x = -3$ hay inflexión
- En $(-\infty, -3)$ la función es cóncava hacia abajo
- En $(-3, +\infty)$ la función es convexa hacia abajo.

Ejercicios nº 5

$$f(x) = [2x]^3$$

Comprobamos si en $x=1$ hay inflexión

$$f'(x) = 3[Zx]^2 \cdot \frac{1}{x} = [Zx]^2 \cdot \frac{3}{x}$$

$$f''(x) = 6 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} + 3[Lx]^2 \cdot \frac{-1}{x^2} = 6 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} - 3[Lx]^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$f''(1) = 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} + 3 \cdot [1]^2 \cdot \frac{-1}{12} = 6 \cdot 0.1 - 3 \cdot 0.1 = 0$$

En $x=1$ puede haber punto de inflexión.

$$f'''(x) = 6 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} - 6 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x^2} - \left[6 \cdot Lx \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2} + 3 [Lx]^2 \cdot \frac{-2x}{x^4} \right] \neq$$

$$f'''(x) = \frac{6}{x^2} - \frac{6 \cdot Lx}{x^2} - \frac{6Lx}{x^3} + \frac{6 \cdot [Lx]^2}{x^3}$$

$$f'''(1) = \frac{6}{1} - \frac{0}{1} - \frac{0}{1} + \frac{0}{1} = \underline{6} \neq 0 \Rightarrow \text{En } x=1 \text{ hay punto de inflexión.}$$

$f'''(1) > 0 \Rightarrow f''(x)$ es una función creciente en $x=1 \Rightarrow$

\Rightarrow Como $f''(1)=0$, verif. $f''(1^-) < 0$ e $f''(1^+) > 0 \Rightarrow$

\Rightarrow f(x) será cóncava hacia abajo a la izquierda de 1 y convexa hacia abajo a la derecha de 1.

Par tanto :

CONCAVA HACIA ABAJO CONVEXA HACIA ABAJO

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2001/02

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Integrales. Cálculo de Primitivas. Integral definida.

Código: ACANMA33.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2001)

El valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx$ es:

- a) $-\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$
- b) $\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2001)

La derivada de $F(x) = \int_{-x^2}^{x^2} x^2 \operatorname{sen} t^2 \, dt$ es:

- a) $F'(x) = 4x^3 \operatorname{sen} x^4 + 2 \int_{-x^2}^{x^2} x \operatorname{sen} t^2 \, dt$
- b) $F'(x) = 4 \operatorname{sen} x^3 \operatorname{sen} x^4$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2001)

Sea $F(x) = \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t} \, dt \quad \forall x \in [\pi, 2\pi]$

- a) F es creciente en $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$
- b) F tiene un máximo relativo en $x = \frac{3\pi}{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos 2x \, dx \quad \text{Llamaremos } I = \int e^x \cdot \cos 2x \, dx$$

Utilicemos el método de integración por partes.

$$\text{Llamamos } \begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2 \operatorname{sen} 2x \, dx \\ v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x \end{cases}$$

Entonces:

$$I = u \cdot v - \int v \cdot du = e^x \cdot \cos 2x - \int e^x (-2 \operatorname{sen} 2x) \, dx = e^x \cdot \cos 2x + 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx = e^x \cdot \cos 2x + 2I_1$$

$$\text{Hemos llamado } I_1 = \int e^x \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Resolvamos I_1 : (por partes)

$$\text{Llamamos } \begin{cases} u = \operatorname{sen} 2x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cdot \cos 2x \, dx \\ v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x \end{cases}$$

Entonces:

$$I_1 = u \cdot v - \int v \cdot du = e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - \int e^x \cdot 2 \cdot \cos 2x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 2 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 2I$$

Ordenando tenemos:

$$I = e^x \cdot \cos 2x + 2I_1 = e^x \cdot \cos 2x + 2 e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 4I$$

$$5I = e^x \cdot \cos 2x + 2 e^x \cdot \operatorname{sen} 2x$$

$$I = \frac{1}{5} \cdot e^x (\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x)$$

Considerando los límites de integración:

$$\begin{aligned} I_0^{\pi/2} &= \left[\frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5} e^{\pi/2} (\cos \pi + 2 \operatorname{sen} \pi) - \frac{1}{5} e^0 (\cos 0 + 2 \operatorname{sen} 0) = \\ &= \frac{1}{5} e^{\pi/2} (-1 + 0) - \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (1 + 0) = -\frac{1}{5} e^{\pi/2} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} (e^{\pi/2} + 1) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5} (e^{\pi/2} + 1)}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 2.-

- Buscamos la derivada de $F(x) = \int_{-x^2}^{x^2} x^2 \cdot \pi \sin t^2 dt = x^2 \int_{-x^2}^{x^2} \pi \sin t^2 dt$ $F'(x) = ?$

- Consideremos la función $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \longmapsto g(t) = \pi \sin t^2$

La función $g(t) = \pi \sin t^2$ es continua en todo \mathbb{R} y además es una función par.

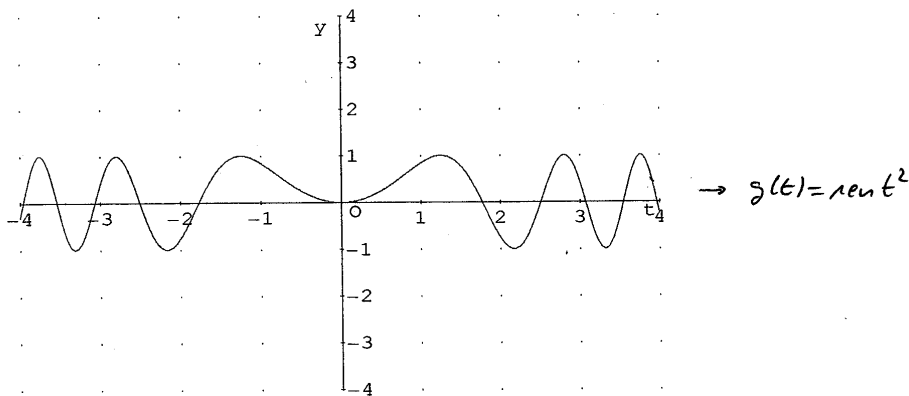
Es decir: $f(-t) = \pi \sin(-t)^2 = \pi \sin t^2 = f(t)$

Al ser una función par, es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Esto último hace que:

$$\int_{-x^2}^{x^2} g(t) dt = \int_{-x^2}^0 g(t) dt + \int_0^{x^2} g(t) dt = 2 \cdot \int_0^{x^2} g(t) dt \quad \text{ya que} \quad \int_0^{x^2} g(t) dt = \int_{-x^2}^0 g(t) dt.$$

Apoyemos esta afirmación con la gráfica de la función $g = g(t) = \pi \sin t^2$.



- Por tanto: $F(x) = x^2 \cdot 2 \int_0^{x^2} \pi \sin t^2 dt = 2x^2 \int_0^{x^2} \pi \sin t^2 dt$. Buscamos $F'(x)$.

- Llamemos $G(x) = \int_0^{x^2} \pi \sin t^2 dt$

- Entonces,

$$F(x) = 2x^2 \cdot G(x)$$

- Consideremos la función siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} g: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto g(t) = \pi \sin t^2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_1: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_1(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \pi \sin t^2 dt \end{array} \right\} \Rightarrow G_1'(x) = \pi \sin x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} G_2: [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow z = G_2(x) = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = G_2'(x) = 2x$$

- Consideremos ahora la función composición $G_1 \circ G_2$:

$$(G_1 \circ G_2)(x) = G_1(G_2(x)) = G_1(x^2) = \int_0^{x^2} \sec t^2 dt = G(x)$$

- Derivemos:

$$G'(x) = [(G_1 \circ G_2)(x)]' = [G_1(G_2(x))]' = [G_1(z)]' = \frac{dG_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sec z^2 \cdot 2x = \sec x^4 \cdot 2x$$

- Derivemos ahora $F(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= [2x^2 \cdot G(x)]' = (2x^2)' \cdot G(x) + 2x^2 \cdot G'(x) = 4x \cdot G(x) + 2x^2 \cdot (\sec x^4 \cdot 2x) = \\ &= 4x \cdot \int_0^{x^2} \sec t^2 dt + 4x^3 \cdot \sec x^4 = 2x \cdot 2 \int_0^{x^2} \sec t^2 dt + 4x^3 \cdot \sec x^4 = \\ &= 2x \int_{-x^2}^{x^2} \sec t^2 dt + 4x^3 \cdot \sec x^4 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$F'(x) = 4x^3 \sec x^4 + 2x \int_{-x^2}^{x^2} \sec t^2 dt$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

Función $F(x) = \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t} dt$ definida en el intervalo $[\pi, 2\pi]$

Analizamos la alternativa (a)

¿Es $F(x)$ creciente en $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$?

$F(x)$ es creciente en $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ si $F'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

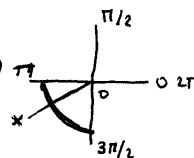
Veamos:

$$F'(x) = \frac{\cos x}{x} = \frac{\text{NEGATIVO o CERO}}{\text{POSITIVO}} \leq 0 \quad \text{o} \quad F'(x) < 0 \quad \forall x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$$

↳ para $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Es decir:

$\forall x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $F'(x) < 0 \Rightarrow F(x)$ es decreciente en $(\pi, \frac{3\pi}{2})$



Por tanto: $F(x)$ no es creciente en $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

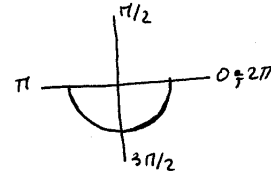
Conclusión: La alternativa (a) es FALSA

Analicemos la alternativa (b)

En los x donde $F'(x)=0$, posible máximo o mínimo.

$$F'(x)=0$$

$$\frac{\cos x}{x} = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \in [\pi, 2\pi]$$



$$F''(x) = \frac{-x \cdot \sec x - \cos x}{x^2}$$

$$F''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{3\pi}{2} \cdot \sec \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{-1 \cdot \frac{3\pi}{2} - 0}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} < 0 \Rightarrow \text{En } x = \frac{3\pi}{2} \text{ hay máximo.}$$

Conclusión Final: La alternativa correcta es (b)

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2001)

El valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x \, dx$ es:

- a) $-\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right)$
- b) $\frac{1}{5}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2001)

La derivada de $F(x) = \int_{-x^2}^{x^2} x^2 \operatorname{sen} t^2 \, dt$ es:

- a) $F'(x) = 4x^3 \operatorname{sen} x^4 + 2 \int_{-x^2}^{x^2} x \operatorname{sen} t^2 \, dt$
- b) $F'(x) = 4 \operatorname{sen} x^3 \operatorname{sen} x^4$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2001)

Sea $F(x) = \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t} \, dt \quad \forall x \in [\pi, 2\pi]$

- a) F es creciente en $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$
- b) F tiene un máximo relativo en $x = \frac{3\pi}{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos 2x \, dx \quad \text{Llamaremos } I = \int e^x \cdot \cos 2x \, dx$$

Utilicemos el método de integración por partes.

$$\text{Llamamos } \begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2 \operatorname{sen} 2x \, dx \\ v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x \end{cases}$$

Entonces:

$$I = u \cdot v - \int v \cdot du = e^x \cdot \cos 2x - \int e^x (-2 \operatorname{sen} 2x) \, dx = e^x \cdot \cos 2x + 2 \int e^x \cdot \operatorname{sen} 2x \, dx = e^x \cdot \cos 2x + 2I_1$$

$$\text{Hemos llamado } I_1 = \int e^x \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Resolvamos I_1 : (por partes)

$$\text{Llamamos } \begin{cases} u = \operatorname{sen} 2x \\ dv = e^x \, dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \cdot \cos 2x \, dx \\ v = \int dv = \int e^x \, dx = e^x \end{cases}$$

Entonces:

$$I_1 = u \cdot v - \int v \cdot du = e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - \int e^x \cdot 2 \cdot \cos 2x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 2 \int e^x \cdot \cos 2x \, dx = e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 2I$$

Ordenando tenemos:

$$I = e^x \cdot \cos 2x + 2I_1 = e^x \cdot \cos 2x + 2 e^x \cdot \operatorname{sen} 2x - 4I$$

$$5I = e^x \cdot \cos 2x + 2 e^x \cdot \operatorname{sen} 2x$$

$$I = \frac{1}{5} \cdot e^x (\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x)$$

Considerando los límites de integración:

$$\begin{aligned} I_0^{\pi/2} &= \left[\frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \operatorname{sen} 2x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{5} e^{\pi/2} (\cos \pi + 2 \operatorname{sen} \pi) - \frac{1}{5} e^0 (\cos 0 + 2 \operatorname{sen} 0) = \\ &= \frac{1}{5} e^{\pi/2} (-1 + 0) - \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (1 + 0) = -\frac{1}{5} e^{\pi/2} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{5} (e^{\pi/2} + 1) \end{aligned}$$

Es decir:

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5} (e^{\pi/2} + 1)}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio n° 2.-

- Buscamos la derivada de $F(x) = \int_{-x^2}^{x^2} x^2 \cdot \sin t^2 dt = x^2 \int_{-x^2}^{x^2} \sin t^2 dt$ $F'(x) = ?$

- Consideremos la función $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \longmapsto g(t) = \sin t^2$

La función $g(t) = \sin t^2$ es continua en todo \mathbb{R} y además es una función par.

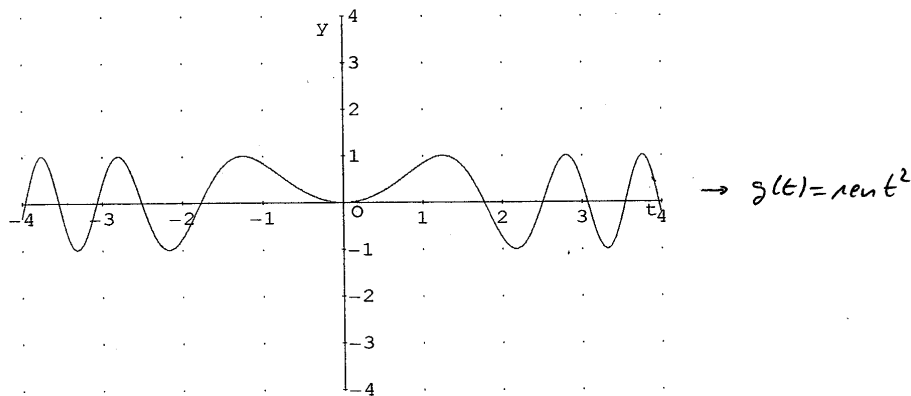
Es decir: $f(-t) = \sin(-t)^2 = \sin t^2 = f(t)$

Al ser una función par, es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Esto último hace que:

$$\int_{-x^2}^{x^2} g(t) dt = \int_{-x^2}^0 g(t) dt + \int_0^{x^2} g(t) dt = 2 \cdot \int_0^{x^2} g(t) dt \quad \text{ya que } \int_0^{x^2} g(t) dt = \int_{-x^2}^0 g(t) dt.$$

Apoyemos esta afirmación con la gráfica de la función $g = g(t) = \sin t^2$.



- Por tanto: $F(x) = x^2 \cdot 2 \int_0^{x^2} \sin t^2 dt = 2x^2 \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$. Buscamos $F'(x)$.

- Llamemos $G(x) = \int_0^{x^2} \sin t^2 dt$

- Entonces,

$$F(x) = 2x^2 \cdot G(x)$$

- Consideremos las funciones siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} g: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto g(t) = \sin t^2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_1: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_1(x) = \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \sin t^2 dt \end{array} \right\} \Rightarrow G_1'(x) = \sin x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} G_2: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow z = G_2(x) = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = G_2'(x) = 2x$$

- Consideremos ahora la función composición $G_1 \circ G_2$:

$$(G_1 \circ G_2)(x) = G_1(G_2(x)) = G_1(x^2) = \int_0^{x^2} \sec t^2 dt = G(x)$$

- Derivemos:

$$G'(x) = [(G_1 \circ G_2)(x)]' = [G_1(G_2(x))] = [G_1(z)]' = \frac{dG_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sec z^2 \cdot 2x = \sec x^4 \cdot 2x$$

- Derivemos ahora $F(x)$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= [2x^2 \cdot G(x)]' = (2x^2)' \cdot G(x) + 2x^2 \cdot G'(x) = 4x \cdot G(x) + 2x^2 \cdot (\sec x^4 \cdot 2x) = \\ &= 4x \cdot \int_0^{x^2} \sec t^2 dt + 4x^3 \cdot \sec x^4 = 2x \cdot 2 \int_0^{x^2} \sec t^2 dt + 4x^3 \cdot \sec x^4 = \\ &= 2x \int_{-x^2}^{x^2} \sec t^2 dt + 4x^3 \cdot \sec x^4 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$F'(x) = 4x^3 \sec x^4 + 2x \int_{-x^2}^{x^2} \sec t^2 dt$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

Función $F(x) = \int_{\pi}^x \frac{\cos t}{t} dt$ definida en el intervalo $[\pi, 2\pi]$

Analizamos la alternativa (a)

¿Es $F(x)$ creciente en $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$?

$F(x)$ es creciente en $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ si $F'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

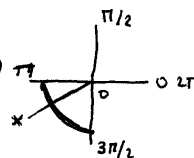
Veamos:

$$F'(x) = \frac{\cos x}{x} = \frac{\text{NEGATIVO o CERO}}{\text{POSITIVO}} \leq 0 \quad \text{o} \quad F'(x) < 0 \quad \forall x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$$

↳ para $x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

Es decir:

$\forall x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $F'(x) < 0 \Rightarrow F(x)$ es decreciente en $(\pi, \frac{3\pi}{2})$



Por tanto: $F(x)$ no es creciente en $(\pi, \frac{3\pi}{2})$

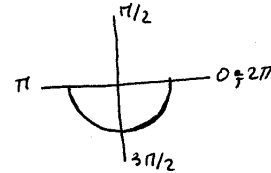
Conclusión: La alternativa (a) es FALSA

Analicemos la alternativa (b)

En los x donde $F'(x)=0$, posible máximo o mínimo.

$$F'(x)=0$$

$$\frac{\cos x}{x}=0 \Rightarrow \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2} \in [\pi, 2\pi]$$



$$F''(x) = \frac{-x \cdot \ln x - \cos x}{x^2}$$

$$F''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{3\pi}{2} \cdot \ln \frac{3\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{-1 \cdot \frac{3\pi}{2} - 0}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2} = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} < 0 \Rightarrow \text{En } x = \frac{3\pi}{2} \text{ hay máximo.}$$

Conclusión Final: La alternativa correcta es (b)

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2002/03

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Integrales. Cálculo de Primitivas. Integral definida

Código: ACANMA36.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2002)

El valor de la integral $\int_0^1 (x^2 - 1)e^x dx$ es:

- a) -1
- b) e
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2002)

El valor de la integral $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$ es:

- a) $\frac{\pi}{4}$
- b) $\arctg e - \frac{\pi}{4}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2002)

El valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \operatorname{tg} t dt}{\operatorname{sen}^2 x}$ es:

- a) 0
- b) $\frac{9}{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 2002)

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $G(x) = \int_0^{2(x-1)} e^{t^2} dt$ en el punto $x=1$ es:

- a) $y = ex - e$
- b) $y = 2x - 2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

$$I = \int_0^1 (x^2 - 1) e^x dx$$

• Resolvemos $\int (x^2 - 1) e^x dx = J$

Por partes. Llamamos $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$J = u \cdot v - \int v du = (x^2 - 1) \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx = (x^2 - 1) \cdot e^x - 2 \int x e^x dx = (x^2 - 1) e^x - 2J_1$$

Resolvemos $J_1 = \int x e^x dx$

Por partes. Llamamos $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$J_1 = u \cdot v - \int v du = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x$$

Entonces:

$$J = (x^2 - 1) \cdot e^x - 2 \cdot (x \cdot e^x - e^x) = x^2 \cdot e^x - e^x - 2x \cdot e^x + 2e^x = x^2 e^x - 2x e^x + e^x$$

$$I = \left[x^2 e^x - 2x e^x + e^x \right]_0^1 = 1^2 e^1 - 2 \cdot 1 \cdot e^1 + e^1 - 0^2 \cdot e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 - e^0 = e - 2e + e - 1 = -1$$

Por tanto:

$$I = \int_0^1 (x^2 - 1) \cdot e^x dx = -1$$

Conclusión: la alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 2.-

Debemos calcular $I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

Primero debemos resolver la integral $J = \int \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$

Por cambio de variable:

$$\begin{cases} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{cases} \Rightarrow J = \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$J = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctan t + C \quad \text{Una primitiva es } J = \arctan t = \arctan e^x$$

Entonces:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = [\arctan e^x]_0^1 = \arctan e^1 - \arctan e^0 = \arctan e - \arctan 1 = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Por tanto:
$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = \arctan e - \frac{\pi}{4}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

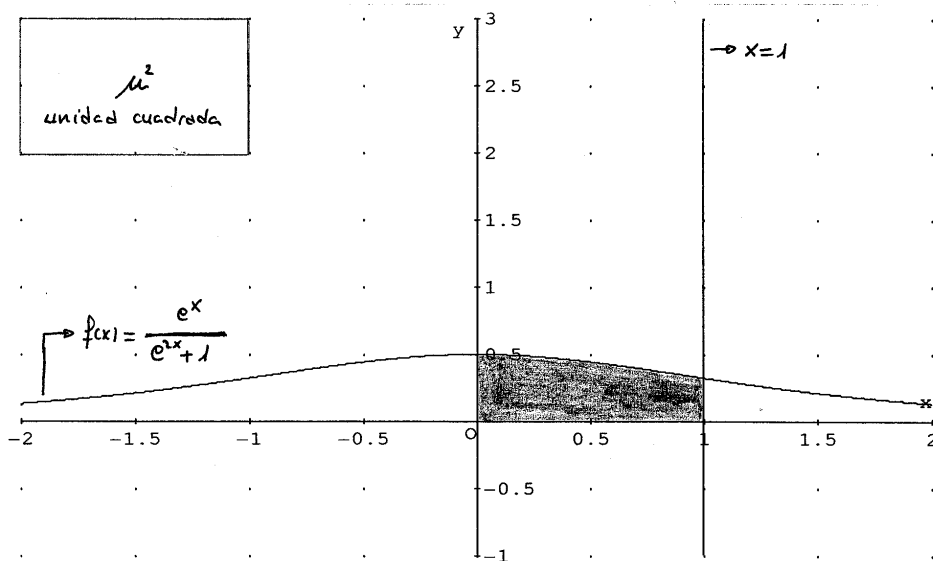
Vamos a comprobarlo gráficamente:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx = 1.218282905... - 0.785398163... \approx 0.432884741...$$

$I =$ Área limitada por la gráfica de $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$, el eje de abscisas, el eje de ordenadas y la recta $x=1$

$$I \approx 0.432884741 \text{ m}^2$$

Representando la función $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ tenemos:



En la gráfica puede apreciarse como $I = \text{Área sombreada} \approx 0.432884741 \text{ m}^2$

Ejercicio nº 3.-

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \tan t \, dt}{\tan^2 x} = \frac{\int_0^0 \tan t \, dt}{\tan^2 0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

Llamamos $F(x) = \int_0^{3x} \tan t \, dt$ que es continua y derivable en un intervalo $[0, b]$

$g(x) = \tan^2 x$ que es continua y derivable en todo \mathbb{R} .

Se cumplen las condiciones para aplicar L'Hôpital.

Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \tan t \, dt}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

$$g'(x) = 2 \cdot \tan x \cdot \cos x = 2 \tan x$$

$F'(x) = ? \rightarrow$ debemos hallarlo.

Consideremos las funciones $F_1: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto F_1(x) = 3x \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} F_1: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F_1(x) = 3x \end{matrix}} \right\} \Rightarrow F_1'(x) = 3; z = F_1(x) = 3x$

$F_2: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto F_2(x) = \int_0^x \tan t \, dt \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} F_2: [0, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F_2(x) = \int_0^x \tan t \, dt \end{matrix}} \right\} F_2'(x) = \tan x$

Consideremos la composición:

$$(F_2 \circ F_1)(x) = F_2(F_1(x)) = F_2(3x) = \int_0^{3x} \tan t \, dt = F(x)$$

$$F'(x) = \frac{dF_2(z)}{dx} = \frac{dF_2(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \tan z \cdot 3x = \tan 3x \cdot 3x$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \tan t \, dt}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x \cdot 3x}{2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \tan 3x}{2 \tan x} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\cos x} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\tan 0}{\cos 0} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \frac{0}{1} = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x} \tan t \, dt}{\tan^2 x} = 0}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 4.-

- Tenemos la función $G(x) = \int_0^{x(x-1)} e^{t^2} dt$
- Para $x=1$ tenemos que $G(1) = \int_0^{1 \cdot 0} e^{t^2} dt = \int_0^0 e^{t^2} dt = 0$
Esto significa que el punto $P(1,0)$ pertenece a la gráfica de $G(x)$.
- Buscamos la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(1,0)$ y es tangente a la gráfica de $G(x)$ en ese punto.
Es decir:

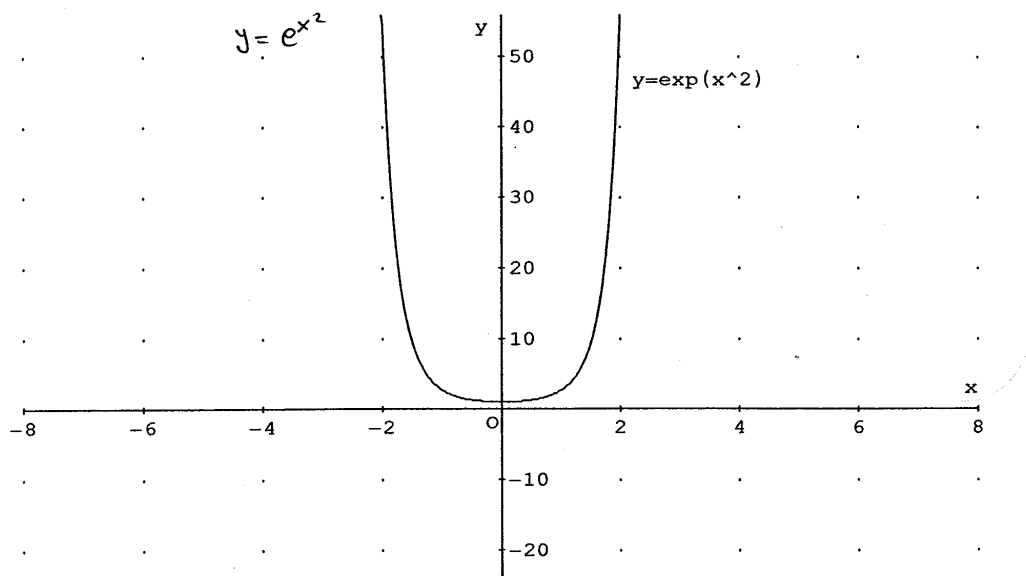
r : recta que $\begin{cases} \text{pasa por el punto } P(1,0) \\ \text{su pendiente es } m = G'(1) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = G'(1) \cdot (x - 1)$

$y = G'(1) \cdot x - G'(1)$

↳ recta buscada.

- Necesitamos hallar $G'(x)$ y en concreto $G'(1)$.
- Analicemos la función $g(x) = e^{x^2}$
 - Se trata de una función positiva $\forall x \in \mathbb{R}$. Es decir: $\forall x \in \mathbb{R}$ es $g(x) > 0$
 - Es una función par, es decir: $g(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 - Por ser PAR es simétrica respecto al eje de ordenadas.

Veamos su gráfica:



Al ser $g(x) = e^{x^2}$ simétrica respecto al eje de ordenadas, podemos poner que:

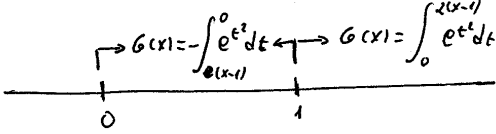
si $a \geq 0$ entonces $\int_{-a}^0 e^{x^2} dx = \int_0^a e^{x^2} dx$

- Analicemos la función $G(x) = \int_0^{2(x-1)} e^{t^2} dt$

Observamos que si $0 < x < 1$ entonces $2(x-1) < 0$, es decir, el límite superior es menor que el límite inferior. Esto significa que:

$$\int_0^{2(x-1)} e^{t^2} dt = - \int_{2(x-1)}^0 e^{t^2} dt \quad \text{cuando } 2(x-1) < 0, \text{ es decir, } 0 < x < 1.$$

Por tanto, definimos la función $G(x)$ del siguiente modo:

$$G(x) = \begin{cases} - \int_{2(x-1)}^0 e^{t^2} dt & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \int_0^{2(x-1)} e^{t^2} dt & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$


- Buscamos $G'_-(x)$ y $G'_+(x)$.

Como la función $G(x)$ es distinta a la izquierda y derecha de $x=1$, necesitamos hallar $G'_-(1)$, $G'_+(1)$

- * Veamos $G'_-(1)$

$$\text{En este caso } G(x) = - \int_{2(x-1)}^0 e^{t^2} dt = - \int_0^{-2(x-1)} e^{t^2} dt$$

↳ al ser $g(t) = e^{t^2}$ una función PAR

Hallemos $G'(x)$ a la izquierda de 1

$$\left. \begin{aligned} \text{Llamamos } G_1: [0, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow G_1(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \end{aligned} \right\} \Rightarrow G'_1(x) = e^{x^2}$$

$$\left. \begin{aligned} G_2: [0, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow G_2(x) = -2(x-1) = z \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = G'_2(x) = -2$$

Consideremos la composición $(G_1 \circ G_2)(x)$:

$$(G_1 \circ G_2)(x) = G_1(G_2(x)) = G_1(z) = \int_0^z e^{t^2} dt = \int_0^{-2(x-1)} e^{t^2} dt = -G(x)$$

Derivando:

$$-G'(x) = (G_1 \circ G_2)'(x) = \frac{dG_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^{z^2} \cdot (-2) = -2 \cdot e^{[-2(x-1)]^2} = -2 \cdot e^{4(x-1)^2}$$

$$\text{Deducimos que } \boxed{G'(x) = 2 \cdot e^{4(x-1)^2}} \Rightarrow G'_-(1) = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 = 2 \Rightarrow \boxed{G'_-(1) = 2}$$

↳ Derivada de $G(x)$ a la izquierda de 1 ($0 \leq x < 1$)

* Veamos $G'_+(1)$

En este caso $G(x) = \int_0^{2(x-1)} e^{t^2} dt$

Hallemos $G'(x)$ a la derecha de 1.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Llamamos } G_1: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_1(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \end{array} \right\} \Rightarrow G'_1(x) = e^{x^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_2: [0, b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_2(x) = 2(x-1) = z \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = G'_2(x) = 2$$

Consideremos la composición $(G_1 \circ G_2)(x)$:

$$(G_1 \circ G_2)(x) = G_1(G_2(x)) = G_1(z) = \int_0^z e^{t^2} dt = \int_0^{2(x-1)} e^{t^2} dt = G(x)$$

Derivando:

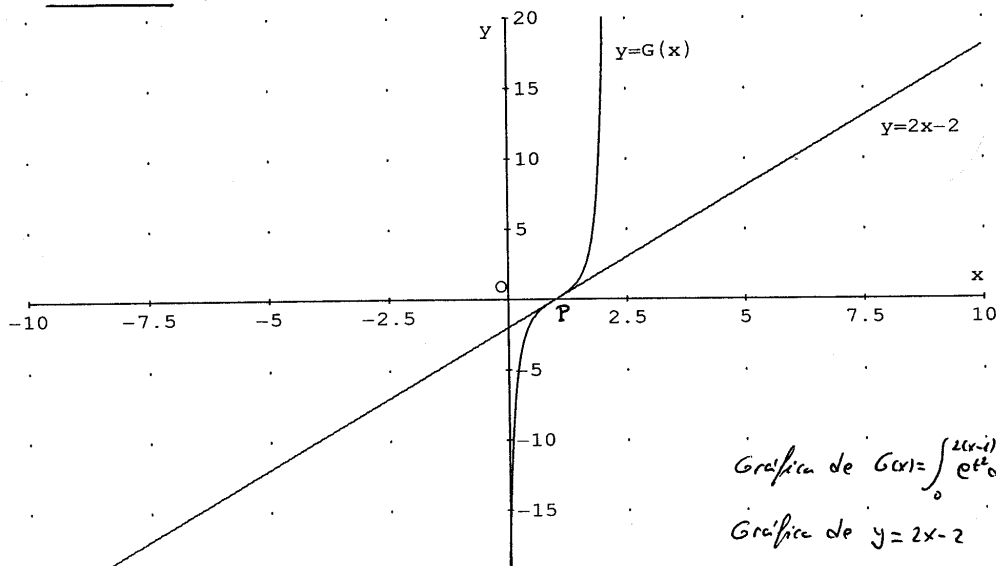
$$G'(x) = (G_1 \circ G_2)'(x) = \frac{dG_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = e^{z^2} \cdot 2 = e^{[2(x-1)]^2} \cdot 2 = 2 \cdot e^{4(x-1)^2}$$

De donde se: $G'(x) = 2 \cdot e^{4(x-1)^2} \Rightarrow G'_+(1) = 2 \cdot e^0 = 2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{G'_+(1) = 2}$

\hookrightarrow Derivada de $G(x)$ a la derecha de 1 ($x \geq 1$)

Por tanto $\left. \begin{array}{l} G'_-(1) = 2 \\ G'_+(1) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{G'(1) = 2}$ $G(x)$ es derivable en $x=1$ y la derivada es 2.

- La recta tangente a $G(x)$ en el punto $P(1,0)$ es $\boxed{y=2x-2}$
- Conclusión: La alternativa correcta es **(6)**



U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2002/03

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Integrales. Cálculo integral.

Código: ACANMA37.WPD

Ejercicio nº 1.-

Resolver la integral $I = \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2002)

El valor de la integral definida $\int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$ es:

- a) $\arctg 2$
- b) $2 + \frac{\pi}{4}$
- c) Ninguna de las anteriores repuestas.

Ejercicio nº 3.-

Resolver la integral $I = \int \frac{5}{x^2 + 6x + 10} dx$

SOLUCIONES

CÓDIGOS: ACANMA37.WPD

Ejercicio nº1.-

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} P(x) = 1 \\ Q(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 \end{cases}$$

- Hallamos las raíces de $Q(x) = (x^2 - 2x + 2)^2$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \quad ; \quad x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \end{cases}$$

$$x^2 - 2x + 2 = (x - z_1) \cdot (x - z_2)$$

$$(x^2 - 2x + 2)^2 = (x - z_1)^2 \cdot (x - z_2)^2 \Rightarrow Q(x) \text{ tiene 4 raíces complejas.}$$

- Es aconsejable utilizar el método de Hermite:

$$Q(x) = (x^2 - 2x + 2)^2 = (x^2 - 2x + 2) \cdot (x^2 - 2x + 2)$$

$$Q'(x) = 2 \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot (2x - 2) = 4 \cdot (x^2 - 2x + 2) \cdot (x - 1)$$

$$B_1(x) = \text{m.c.d} \{ Q(x), Q'(x) \} = x^2 - 2x + 2$$

$$B_2(x) = \frac{Q(x)}{B_1(x)} = \frac{(x^2 - 2x + 2)^2}{x^2 - 2x + 2} = x^2 - 2x + 2$$

El método de Hermite asegura que:

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{A_1(x)}{B_1(x)} + \int \frac{A_2(x)}{B_2(x)} dx$$

$$\text{siendo} \quad \begin{cases} A_1(x) = \text{polinomio de un grado inferior a } B_1(x) \\ A_2(x) = \text{polinomio de un grado inferior a } B_2(x) \end{cases}$$

Es decir:

$$I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{ax + b}{x^2 - 2x + 2} + \int \frac{cx + d}{x^2 - 2x + 2} dx = \int \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx$$

$$\text{Derivando:} \quad \frac{1}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \left(\frac{ax + b}{x^2 - 2x + 2} \right)' + \frac{cx + d}{x^2 - 2x + 2}$$

Operando:

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{(ax+b) \cdot (x^2-2x+2) - (2x-2) \cdot (ax+b)}{(x^2-2x+2)^2} + \frac{cx+d}{x^2-2x+2}$$

$$\frac{1}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{a \cdot (x^2-2x+2) - (2x-2) \cdot (ax+b) + (cx+d) \cdot (x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2}$$

Debemos que $1 = a \cdot (x^2-2x+2) - (2x-2) \cdot (ax+b) + (cx+d) \cdot (x^2-2x+2)$

Operando después de asignar algunos valores a x tenemos:

$$\boxed{c=0} \rightarrow \text{evidente ya que } 1 = cx^3 + \dots \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$$\text{para } x=0 \Rightarrow 2a - (-2) \cdot b + 2 \cdot d = 1 \Rightarrow \boxed{2a + 2b + 2d = 1}$$

$$\text{para } x=1 \Rightarrow a \cdot 1 - 0 \cdot b + d \cdot 1 = 1 \Rightarrow \boxed{a + d = 1}$$

$$\text{para } x=-1 \Rightarrow a \cdot 5 - (-4) \cdot (-a+b) + d \cdot 5 = 1 \Rightarrow 5a - 4a + 4b + 5d = 1 \Rightarrow \boxed{a + 4b + 5d = 1}$$

Debemos resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2a + 2b + 2d = 1 \\ a + d = 1 \\ a + 4b + 5d = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 1 - a \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + 2(1-a) = 1 \\ a + 4b + 5(1-a) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b = -1 \\ -4a + 4b = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{b = -\frac{1}{2}} \Rightarrow 4a = 4 - 2 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{2}}$$

Por tanto:

$$I = \int \frac{1}{(x^2-2x+2)^2} dx = \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2-2x+2} + \int \frac{\frac{1}{2}}{x^2-2x+2} dx = \frac{x-1}{2x^2-4x+4} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$\text{Resolvamos } I_1 = \int \frac{dx}{x^2-2x+2}$$

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg t = \arctg(x-1)$$

$\hookrightarrow \text{Hacemos } \begin{cases} t = x-1 \\ dt = dx \end{cases}$

$$\boxed{I = \frac{x-1}{2x^2-4x+4} + \frac{1}{2} \cdot \arctg(x-1) + K}$$

Ejercicio n° 2.-

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

Resolvamos la integral indefinida $J = \int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} dx$

$$J = \int \frac{P(x)}{\phi(x)} dx \quad \text{siendo} \quad \begin{cases} P(x) = x^2 + x + 2 \\ \phi(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Intentemos factorizar $\phi(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

↳ Divisores de 1: -1, 1

Busquemos raíces enteras de $\phi(x)$

• para $x = -1 \Rightarrow \phi(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$

↳ raíz entera de $\phi(x)$

La división $\phi(x) : x + 1$ es exacta.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \phi(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1) \cdot (x^2+1)$$

$$c(x) = x^2 + 1$$

↳ no se puede factorizar porque no tiene raíces reales.

Por tanto:

$$\frac{P(x)}{\phi(x)} = \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 2}{(x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2(x)}{x^2+1} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+1}$$

Es decir: $\left. \begin{array}{l} A_1 = c \text{ constante} \\ A_2(x) = ax + b \end{array} \right\} \text{ Buscamos } \underline{c}, \underline{a} \text{ y } \underline{b}$

Veamos:

$$\frac{c}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+1} = \frac{c \cdot (x^2+1) + (ax+b) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x^2+1)} = \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$\text{Deducimos que } c \cdot (x^2+1) + (ax+b) \cdot (x+1) = x^2 + x + 2$$

• para $x = 0 \Rightarrow \boxed{c + b = 2}$

• para $x = 1 \Rightarrow 2c + (a+b) \cdot 2 = 4 \quad ; \quad \boxed{2a + 2b + 2c = 4}$

• para $x = -1 \Rightarrow 2c + (-a+b) \cdot 0 = 2 \Rightarrow \boxed{c = 1}$

Entonces $\boxed{b = 1}$ y $2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$

Tenemos :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

Entonces :

$$J = \int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln(x+1) + \arctan x$$

$$I = \int_0^1 \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \left[\ln(x+1) + \arctan x \right]_0^1 = \ln 2 + \arctan 1 - \ln 1 - \arctan 0 = \\ = \ln 2 + \frac{\pi}{4} - 0 - 0 = \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{I = \int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2+x+1} dx = \ln 2 + \frac{\pi}{4}} \Rightarrow \text{la alternativa correcta es } \textcircled{6}$$

Ejercicio n° 3.-

$$I = \int \frac{5}{x^2+6x+10} dx = 5 \cdot \int \frac{1}{x^2+2 \cdot 3x+9+1} dx = 5 \cdot \int \frac{1}{(x+3)^2+1} dx$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Llamemos } t = x+3 \\ dt = dx \end{array} \right\} \Rightarrow I = 5 \cdot \int \frac{1}{t^2+1} dt = 5 \cdot \arctan t + K = \\ = 5 \cdot \arctan (x+3) + K$$

$$\text{Por tanto: } \boxed{I = 5 \cdot \arctan (x+3) + K}$$

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2001)

La serie $\sum \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}$ es:

- a) Divergente
- b) Convergente.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2001)

La serie $\sum \frac{5^n + 2}{n^3 + 3}$ es:

- a) Divergente
- b) Convergente
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en febrero de 2001)

La serie $\sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$ es:

- a) Divergente.
- b) Convergente.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en febrero de 2001)

La serie $\sum \frac{1 + \cos^2 n}{n^\alpha}$ es:

- a) Divergente si $1 < \alpha$.
- b) Convergente si $0 < \alpha < 1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 5.- (propuesto en febrero de 2001)

La serie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ es:

- a) Condicionalmente convergente.
- b) Absolutamente convergente.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA38.WPD

Ejercicio nº 1.-

$S = \sum \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$ se trata de una serie de términos positivos

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

$$\hookrightarrow u_n = \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$$

Para ver si S es convergente o divergente, aplicamos el criterio del cociente o de D'Alembert.

Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad \begin{cases} \cdot \text{ si } l > 1 \text{ la serie diverge} \\ \cdot \text{ si } l < 1 \text{ la serie converge} \\ \cdot \text{ si } l = 1 \text{ no podemos decidir.} \end{cases}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2 \cdot 4^{n+1}}{[2(n+1)]!}}{\frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 4^{n+1} \cdot (2n)!}{[2(n+1)]! \cdot (n!)^2 \cdot 4^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot 4 \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot n! \cdot n! \cdot 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot 4 \cdot (2n)!}{(2n+2) \cdot (2n+1) \cdot (2n)! \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{n!}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 4}{(2n+2) \cdot (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2} = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

Es decir: $\boxed{l=1} \Rightarrow$ No podemos decidir así.

Conclusión: El criterio de D'Alembert no nos permite decidir.

Aplicaremos el criterio de Raabe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = k \quad \begin{cases} \cdot \text{ si } k > 1 \text{ la serie converge} \\ \cdot \text{ si } k < 1 \text{ la serie diverge} \\ \cdot \text{ si } k = 1 \text{ no podemos decidir.} \end{cases}$$

Veamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(1 - \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{4n^2 + 6n + 2 - 4n^2 - 8n - 4}{4n^2 + 6n + 2}$$

↳ Hecho anteriormente

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{-2n - 2}{4n^2 + 6n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 2n}{4n^2 + 6n + 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Por tanto: $K = -\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ La serie es divergente

Conclusión: la alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 2.

$$S = \sum \frac{5^n + 2}{n^3 + 3} \quad \text{serie de términos positivos.}$$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots$$

$$\hookrightarrow u_n = \frac{5^n + 2}{n^3 + 3}$$

Aplicaremos el criterio del cociente o de D'Alembert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \quad \begin{cases} \cdot \text{ si } l > 1 \text{ la serie diverge} \\ \cdot \text{ si } l < 1 \text{ la serie converge} \\ \cdot \text{ si } l = 1 \text{ no podemos decidir.} \end{cases}$$

Veamos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1} + 2}{(n+1)^3 + 3}}{\frac{5^n + 2}{n^3 + 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(5^{n+1} + 2) \cdot (n^3 + 3)}{(5^n + 2) \cdot [(n+1)^3 + 3]} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 2}{5^n + 2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{(n+1)^3 + 3} = \frac{5^{\infty} + 2}{5^{\infty} + 2} \cdot \frac{\infty^3 + 3}{(\infty+1)^3 + 3} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \cdot \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminado.} \end{aligned}$$

Salvemos ambas indeterminaciones:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 2}{5^n + 2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 4} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1} + 2}{5^n}}{\frac{5^n + 2}{5^n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3 + 3}{n^3}}{\frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 4}{n^3}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^n \cdot 5}{5^n} + \frac{2}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n} + \frac{2}{5^n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3} + \frac{3n}{n^3} + \frac{4}{n^3}} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{5^n}}{1 + \frac{2}{5^n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}} = \frac{5 + \frac{2}{\infty}}{1 + \frac{2}{\infty}} \cdot \frac{1 + \frac{3}{\infty}}{1 + \frac{3}{\infty} + \frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty}} = \\
 &= \frac{5+0}{1+0} \cdot \frac{1+0}{1+0+0+0} = \frac{5}{1} \cdot \frac{1}{1} = \underline{\underline{5}}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l = 5 \Rightarrow \text{La serie es divergente}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº3

$$S = \sum (\sqrt[n]{n} - 1)^n$$

Dado que $\sqrt[n]{n} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, podemos asegurar que se trata de una serie de términos positivos excepto el primero, que es cero.

$$\begin{aligned}
 S &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \\
 S &= 0 + (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt[3]{3} - 1)^3 + (\sqrt[4]{4} - 1)^4 + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n + \dots
 \end{aligned}$$

Para ver si es convergente o divergente, aplicamos el criterio de la raíz o de Cauchy. Es decir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l \quad \begin{cases} \cdot \text{ si } l < 1 \text{ la serie converge} \\ \cdot \text{ si } l > 1 \text{ la serie diverge} \\ \cdot \text{ si } l = 1 \text{ no podemos decidir.} \end{cases}$$

Veamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} - 1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} - 1$$

Necesitamos hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ (aunque puede demostrarse que es 1).

Aplicaremos el método del logaritmo para resolver este límite:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} \rightarrow \text{Buscamos } A.$$

Tomando logaritmo neperiano:

$$\ln A = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

NOTA: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 0$ porque la sucesión n crece mucho más deprisa que la sucesión $\ln n$.

$$\text{Por tanto: } \ln A = 0 \Rightarrow e^0 = A \Rightarrow A = 1$$

$$\text{Por tanto: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 1 - 1 = 0$$

Entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = l = 0 < 1 \Rightarrow$ la serie es convergente.

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio n.º 4.

$$S = \sum \frac{1 + \cos^2 n}{n^\alpha} \text{ serie de términos positivos ya que } \cos^2 n \geq 0$$

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

$$\hookrightarrow u_n = \frac{1 + \cos^2 n}{n^\alpha} = \frac{\text{POSITIVO}}{\text{POSITIVO}} \geq 0$$

Analizemos la alternativa a).

Es decir: Si $\alpha > 1$ ¿es S divergente?

Veamos:

Observando que $1 + \cos^2 n \leq 1 + 1 = 2$ tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1 + \cos^2 1}{1^\alpha} \leq \frac{2}{1^\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{1^\alpha} \\ u_2 &= \frac{1 + \cos^2 2}{2^\alpha} \leq \frac{2}{2^\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{2^\alpha} \\ u_3 &= \frac{1 + \cos^2 3}{3^\alpha} \leq \frac{2}{3^\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{3^\alpha} \\ \dots &\dots \dots \\ u_n &= \frac{1 + \cos^2 n}{n^\alpha} \leq \frac{2}{n^\alpha} = 2 \cdot \frac{1}{n^\alpha} \\ \dots &\dots \dots \end{aligned} \right\} \text{Recordemos que } \alpha > 1.$$

Recordemos la serie armónica generalizada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

Esta serie es convergente cuando $\alpha > 1$.

Esto hace que la serie $\frac{2}{1^\alpha} + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2}{3^\alpha} + \frac{2}{4^\alpha} + \dots + \frac{2}{n^\alpha} + \dots$ también converge.

Como cada término u_n de la serie dada es menor o igual que cada término de una serie convergente, por el criterio de comparación, podemos asegurar que la serie $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ también es convergente.

Por tanto:

$$\alpha > 1 \Rightarrow S = \sum \frac{1 + \cos^2 n}{n^\alpha} \text{ es convergente.}$$

Conclusión: La alternativa (a) es FALSA.

Analicemos la alternativa (b).

Es decir: Si $0 < \alpha < 1$ entonces S es convergente.

Veamos:

$$1 + \cos^2 n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Esto hace que:

$$u_n = \frac{1 + \cos^2 n}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n^\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{1}{1^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$ es divergente cuando $\alpha < 1$ tenemos que cada término de la serie dada es mayor o igual que cada término respectivo de una serie divergente. Por el criterio de comparación, podemos asegurar que la serie dada también es divergente.

Por tanto:

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \sum \frac{1 + \cos^2 n}{n^{\alpha}} = S \text{ es divergente.}$$

conclusión: La alternativa (b) es FALSA.

conclusión final: La alternativa correcta es (c)

Ejercicio nº 5.-

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} = -\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \dots$$

Se trata de una serie alternada con infinitos términos negativos e infinitos términos positivos.

Analicemos la alternativa (b) \rightarrow ¿Es S absolutamente convergente?

Veamos:

La serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$ es absolutamente convergente si $A = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \right|$ es convergente.

Es decir, debemos ver si la serie $A = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ es convergente o divergente (notare que A es una serie de términos positivos).

• Estudiemos la convergencia de A .

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} = \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Es decir, podemos considerar la serie $A = 0 + 0 + 0 + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$ en la que hemos eliminado los tres primeros términos.

- Observamos que $A = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{0.5}}$ se trata de una serie armónica generalizada del tipo $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ con $\alpha = 0.5 < 1$.
- Sabemos que las series armónicas generalizadas con $\alpha < 1$ son divergentes, por lo que A es divergente.

Concluimos:

$$A = \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ divergente} \Rightarrow A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \text{ es divergente} \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \text{ es absolutamente divergente} \Rightarrow S \text{ no es absolutamente convergente.}$$

Por tanto: la alternativa (b) es FALSA.

- Analicemos la alternativa (a).

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \text{ es condicionalmente convergente si } \begin{cases} S \text{ es convergente} \\ S \text{ es absolutamente divergente.} \end{cases}$$

Hemos visto que S es absolutamente divergente al ser A divergente.

Veamos si S es convergente:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} = -\frac{1}{\sqrt{4+3}} + \frac{1}{\sqrt{5+3}} - \frac{1}{\sqrt{6+3}} + \frac{1}{\sqrt{7+3}} - \frac{1}{\sqrt{8+3}} + \frac{1}{\sqrt{9+3}} - \dots = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) + \dots = \\ &\quad \text{negativo} \quad \text{negativo} \quad \text{negativo} \quad \text{negativo} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \right) = T \text{ serie de términos todos negativos que tendrá el mismo carácter que la serie } S \text{ por tener los mismos sumandos.} \end{aligned}$$

Si cambiamos de signo a los términos de la serie T , obtenemos una serie de términos positivos, es decir:

$$\begin{aligned} -T &= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+3}} - \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \right) = L \\ L &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{9}} \right) + \dots \\ &\quad \text{positivo} \quad \text{positivo} \quad \text{positivo} \end{aligned}$$

Sabemos que el carácter de L (convergente o divergente) coincide con el carácter de T , por tanto, con el de S .

- Debemos estudiar el carácter de la serie de términos positivos L .

Antes de aplicar un criterio veamos la condición necesaria de convergencia de una serie de términos positivos.

"Para que L sea convergente es necesario que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ "

Veamos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{+\infty}} - \frac{1}{\sqrt{+\infty}} = 0 - 0 = 0$$

Es decir, la serie L puede ser convergente o divergente.

A simple vista pensamos que puede funcionar el criterio de la integral.

Veamos:

$$L = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ definida en $[1, +\infty)$

Veamos si se cumplen las condiciones para aplicar el criterio de la integral:

(*) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ existe y es continua en $[1, +\infty)$

(**) Veamos que $f(x)$ es no creciente en $[1, +\infty)$.

Para ello calculamos la función derivada:

$$f(x) = (2x+2)^{-\frac{1}{2}} - (2x+3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2x+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (2x+3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(2x+2)^3}}$$

Averiguemos si $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [1, +\infty)$.

$$\forall x \in [1, +\infty)$$

$$2x+3 > 2x+2 \Rightarrow (2x+3)^3 > (2x+2)^3 \Rightarrow \sqrt{(2x+3)^3} > \sqrt{(2x+2)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}} < \frac{1}{\sqrt{(2x+2)^3}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(2x+3)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(2x+2)^3}} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$$

Por tanto, $f(x)$ es decreciente en $[1, +\infty)$

(***) $f(1) = \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = u_1$; $f(2) = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{7}}$; ; $f(n) = \frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$

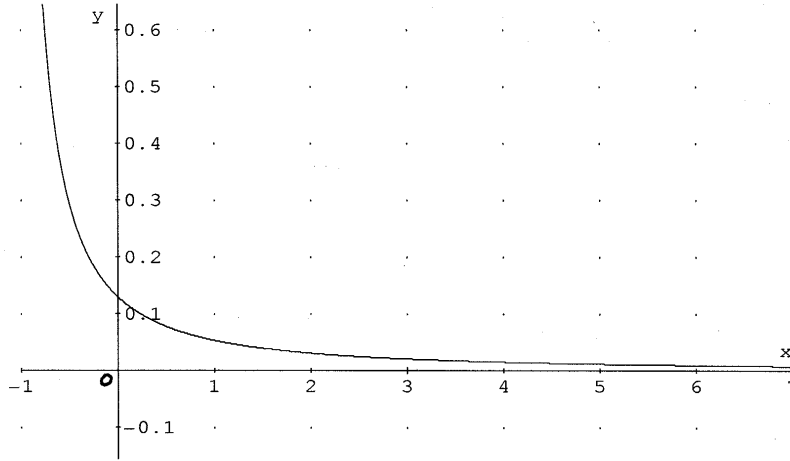
Es decir:

Se cumplen las condiciones para aplicar el criterio de la integral.

La gráfica siguiente corresponde a la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$

Puede apreciarse como su dominio es $[-1, +\infty)$ y es decreciente en todo su dominio.

En el caso concreto del intervalo $[1, +\infty)$, observamos como es decreciente.



Según el criterio de la integral:

Si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b f(x) dx$
 converge, la serie L converge
 diverge, la serie L diverge

Hallamos $\int f(x) dx$ y posteriormente $\int_1^b f(x) dx$

$$\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{2x+2}} - \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{2x+2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx = \int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt - \int \frac{1}{2\sqrt{r}} dr = \sqrt{t} - \sqrt{r}$$

$$\left. \begin{array}{l} t = 2x+2 \\ dt = 2 dx \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} r = 2x+3 \\ dr = 2 dx \\ dx = \frac{1}{2} dr \end{array} \right\}$$

Denotando los cambios $\begin{cases} t = 2x+2 \\ r = 2x+3 \end{cases}$

$$\int f(x) dx = \sqrt{2x+2} - \sqrt{2x+3}$$

$$\int_1^b f(x) dx = \left[\sqrt{2x+2} - \sqrt{2x+3} \right]_1^b = \sqrt{2b+2} - \sqrt{2b+3} - \sqrt{4} + \sqrt{5}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2b+2} - \sqrt{2b+3} - 2 + \sqrt{5} \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2b+2} - \sqrt{2b+3} \right) + \sqrt{5} - 2 =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \infty + 2} - \sqrt{2 \cdot \infty + 3} + \sqrt{5} - 2 = \infty - \infty = \text{Indeterminado},$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\sqrt{2b+2} - \sqrt{2b+3}) + \sqrt{5} - 2 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2b+2} - \sqrt{2b+3}) \cdot (\sqrt{2b+2} + \sqrt{2b+3})}{\sqrt{2b+2} + \sqrt{2b+3}} + \sqrt{5} - 2 = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2b+2 - 2b-3}{\sqrt{2b+2} + \sqrt{2b+3}} + \sqrt{5} - 2 = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{2b+2} + \sqrt{2b+3}} + \sqrt{5} - 2 = 0 + \sqrt{5} - 2 = \underline{\underline{0 + \sqrt{5} - 2}} \end{aligned}$$

Es decir:

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sqrt{5} - 2 = 0.236006797 \dots$$

Como la integral impropia es convergente, la serie L es convergente.

NOTA: El área comprendida entre la función $f(x)$, la recta $x=1$ y el eje de abscisas es aproximadamente $0.236006797 \dots$ u².

Entonces:

$$L \text{ convergente} \Rightarrow T \text{ convergente} \Rightarrow S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} \text{ es convergente.}$$

$$S \text{ convergente y absolutamente divergente} \Rightarrow \boxed{S \text{ condicionalmente convergente.}}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Comprobación:

Utilizando un programa de matemáticas hemos obtenido:

$$\left. \begin{aligned} S_{1000} &= \sum_{n=1}^{1000} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} = -0.249561055257 \\ S_{10000} &= \sum_{n=1}^{10000} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} = -0.260345719356 \\ S_{100000} &= \sum_{n=1}^{100000} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}} = -0.263763733420 \end{aligned} \right\} \text{Aproximaciones a 12 decimales.}$$

U.N.D.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2002/03

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Resolución aproximada de ecuaciones

Código: ACANMA39.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2002)

El número de raíces de la ecuación $x^5 - 16x + 9 = 0$ es:

- a) 5
- b) 1
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2002)

Dada la función $f(x) = x(1 + \sin x)$, se tiene:

- a) f nunca toma el valor 1
- b) f toma el valor 2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ entonces:

- a) f continua en todo \mathbb{R} excepto en $x = 0$
- b) La gráfica de f corta a la gráfica de la función $g(x) = -x + 5$ en un punto de abscisa $c > 0$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.-

La función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

- a) Corta al eje de abscisas en un único punto.
- b) No corta al eje de abscisas.
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 5.-

La ecuación $xe^x = -1$

- a) Tiene solución única.
- b) No tiene solución
- c) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA39.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$x^5 - 16x + 9 = 0 \rightarrow \text{ecuación}$$

- Llamamos $p(x) = x^5 - 16x + 9$. Es una función polinómica de grado 5.
- Queremos saber el número de raíces de $p(x)$, es decir, el número de veces que la gráfica de la función $p(x)$ corta al eje de abscisas, o lo que es lo mismo, el número de soluciones o raíces de la ecuación dada $x^5 - 16x + 9 = 0$.

Veamos:

¿Corta la gráfica de $p(x) = x^5 - 16x + 9$ al eje de abscisas?

Hagamos un "pequeño" análisis de la función $p(x)$:

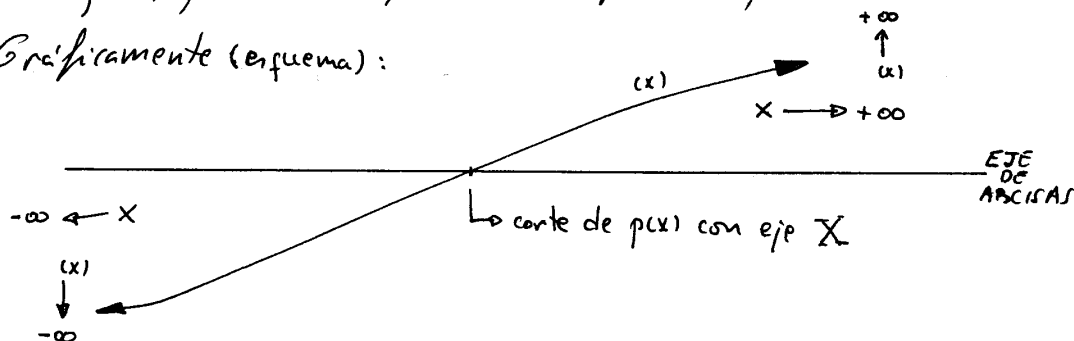
* $p(x)$ es una función continua en todo \mathbb{R} por ser polinómica.

$$\left. \begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 16x + 9) = (-\infty)^5 - 16(-\infty) + 9 = -\infty^5 + \infty + 9 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 16x + 9) = \infty^5 - 16\infty + 9 = \infty^5 - \infty + 9 = +\infty \end{aligned} \right\}$$

Es decir:

$p(x)$ es una función continua en todo \mathbb{R} y tal que para valores de x infinitamente grandes, negativos, las imágenes $p(x)$ son infinitamente grandes, negativos y para valores de x infinitamente grandes, positivos, las imágenes $p(x)$ son infinitamente grandes, positivas.

Gráficamente (esquema):



Conclusión: La función $p(x)$ corta al eje de abscisas, al menos, una vez.

Ahora nos preguntamos:

¿Cortará $p(x)$ más de una vez al eje de abscisas?

Veamos:

- Averiguemos dónde es $p(x)$ creciente y dónde decreciente.

$$p'(x) = 5x^4 - 16$$

- * En los x donde $p'(x) > 0$, la función $p(x)$ es creciente.

$$5x^4 - 16 > 0$$

$$5x^4 > 16$$

$$x^4 > \frac{16}{5} \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } x > +\sqrt[4]{\frac{16}{5}} ; x > +\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \\ \text{o bien } x < -\sqrt[4]{\frac{16}{5}} ; x < -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \end{cases}$$

Es decir: $p(x)$ es creciente en $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}) \cup (\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, +\infty)$

- * En los x donde $p'(x) < 0$, la función $p(x)$ es decreciente.

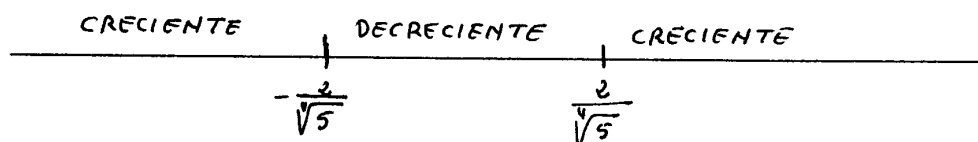
$$5x^4 - 16 < 0$$

$$5x^4 < 16$$

$$x^4 < \frac{16}{5} \Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{16}{5}} < x < \sqrt[4]{\frac{16}{5}} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} < x < \frac{2}{\sqrt[4]{5}}$$

Es decir: $p(x)$ es decreciente en $(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}})$

Por tanto:



- Analicemos el signo de $p(x)$ en los puntos $x = -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$ y en $x = \frac{2}{\sqrt[4]{5}}$

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^5 - 16 \cdot \frac{-2}{\sqrt[4]{5}} + 9 = -\frac{32}{5\sqrt[4]{5}} + \frac{32}{\sqrt[4]{5}} + 9 = \frac{-32 + 160 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} = \\ &= \frac{128 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} > 0 \end{aligned}$$

$$p\left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^5 - 16 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{5}} + 9 = \frac{32}{5\sqrt[4]{5}} - \frac{32}{\sqrt[4]{5}} + 9 = \frac{32 - 160 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} = \frac{-128 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} < 0$$

Es decir:

$$p\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) > 0$$

$$p\left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) < 0$$

$$p(x) \text{ continua en } \mathbb{R}$$

} Además $p(x)$ decreciente en $(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}})$

conclusión: La función $p(x)$ corta una sola vez al eje de abscisas entre $-\frac{2}{\sqrt[5]{5}} > \frac{2}{\sqrt[5]{5}}$.

Ya sabemos que $p(x)$ corta, al menos, dos veces al eje de abscisas.

Por tanto: La alternativa (b) es FALSA.

• Veamos si $p(x)$ corta al eje de abscisas en el intervalo $(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}, +\infty)$

* $p(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}) < 0$

$p(x)$ continua en todo \mathbb{R}

$p(x)$ creciente en $(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}, +\infty)$

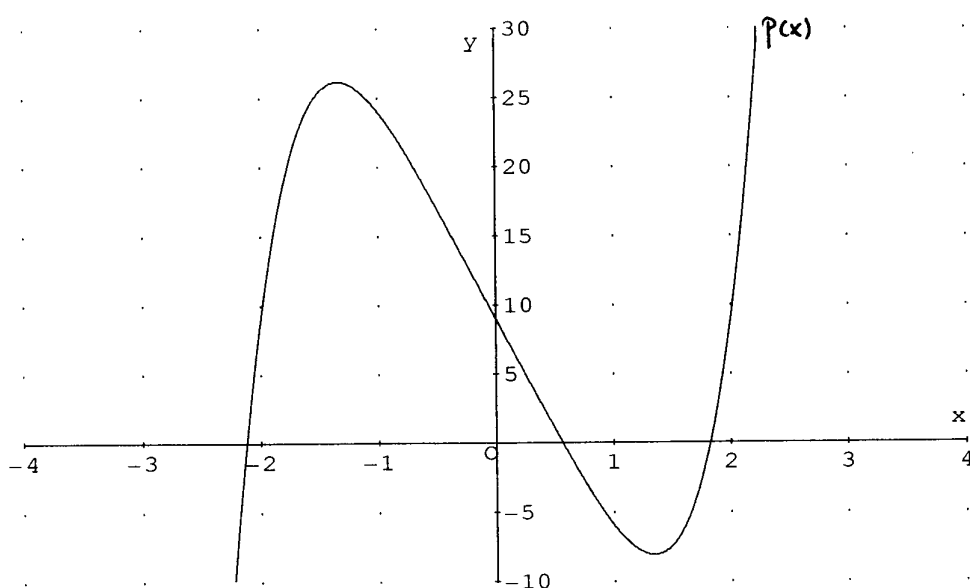
lim $p(x) = +\infty$
 $x \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow p(x)$ corta una sola vez al eje de abscisas en $(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}, +\infty)$.

conclusión: La función $p(x)$ corta TRES VECES al eje de abscisas, es decir, la ecuación $x^5 - 16x + 9 = 0$ tiene TRES raíces.

conclusión final: La respuesta correcta es (c)

Para comprobar el resultado dibujemos la gráfica de $p(x) = x^5 - 16x + 9$.



En la gráfica de la izquierda observamos como $p(x)$ corta al eje de abscisas en tres puntos.

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = x \cdot (1 + \sin x)$$

Analizamos la alternativa (a)

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \begin{cases} \nearrow \text{Verdadero} \\ \searrow \text{Falso} \end{cases}$$

Se trata de ver si la ecuación $x + x \cdot \sin x = 1$ tiene solución,
es decir, $x + x \cdot \sin x - 1 = 0$ tiene solución.

Veamos:

- Consideremos la función $g(x) = x + x \cdot \sin x - 1$
- Se trata de averiguar si la gráfica de $g(x)$ corta al eje de abscisas.
 - * $g(x) = x + x \cdot \sin x - 1$ es una función continua en todo \mathbb{R}
 - * $g(0) = -1 < 0$
 - * $g(\pi/2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 = \pi - 1 > 0$

Es decir:

La función $g(x)$ verifica (Teorema de Bolzano):

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Es continua en } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \bullet \text{ signo } g(0) \neq \text{signo } g(\pi/2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid g(c) = 0$$

$$\text{Es decir: } \exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid c + c \cdot \sin c = 1$$

$$\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid f(c) = 1$$

f toma el valor 1 para un $c \in (0, \frac{\pi}{2})$

conclusión: La alternativa (a) es FALSA.

Analizamos la alternativa (b)

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2 \begin{cases} \nearrow \text{Verdadero} \\ \searrow \text{Falso} \end{cases}$$

Se trata de ver si la ecuación $x + x \cdot \sin x = 2$ tiene solución,
es decir, $x + x \cdot \sin x - 2 = 0$

Veamos:

- Consideremos la función $h(x) = x + x \cdot \sin x - 2$
- Se trata de averiguar si la gráfica de $h(x)$ corta al eje de abscisas. Para ello vamos a ver si $h(x)$ verifica el teorema de Bolzano en algún intervalo $[a, b]$.

* $h(x)$ es continua en todo \mathbb{R}

* $h(0) = 0 + 0 - 2 = -2 < 0$

* $h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 2 = \pi - 2 > 0$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} h(x) \text{ continua en } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{signo } h(0) \neq \text{signo } h(\frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid h(c) = 0$$

Es decir: $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid c + c \cdot \sin c = 2$

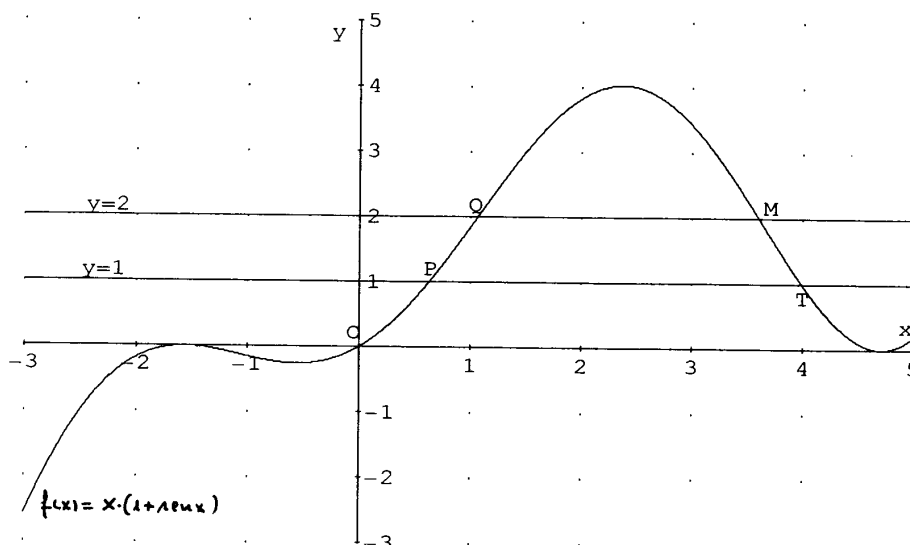
$\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid f(c) = 2$

f toma el valor 2 en un $c \in (0, \frac{\pi}{2})$

Conclusión: La alternativa (b) es VERDADERA

Por tanto: la respuesta correcta es (b)

Para comprobar los resultados obtenidos dibujemos la gráfica de $f(x)$.



En la gráfica de la izquierda observamos como $f(x)$ corta a las rectas $y=1$ (en los puntos P y T) y $y=2$ (en los puntos M y Q).

Es decir, $f(x)$ toma los valores 1 y 2 en "al menos" dos puntos para cada caso.

Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Analizamos la alternativa (a)

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$ ya que $f(x) = x^2 + 1$ en $x \in (-\infty, 0)$

$f(x)$ es continua en $[0, +\infty)$ ya que $f(x) = x + e^x$ si $x \in [0, +\infty)$

$\begin{cases} \hookrightarrow \text{continua } y = e^x \\ \hookrightarrow \text{continua } y = x \end{cases}$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$

Nos preguntamos: ¿Es $f(x)$ continua en $x=0$?

Veamos:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + e^x) = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0$$

conclusión: $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

La alternativa (a) es FALSA.

Analizamos la alternativa (b)

¿Existe $c \in (0, +\infty)$ tal que $f(c) = g(c)$?

¿Existe $c \in (0, +\infty)$ tal que $c + e^c = -c + 5$?

Veamos:

$f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} , y por tanto, en todo $[a, b]$

$g(x)$ es continua en todo \mathbb{R} , y por tanto, en todo $[a, b]$

Consideremos el intervalo $[0, 5]$

$f(x)$ continua en $[0, 5]$

$g(x)$ continua en $[0, 5]$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ g(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) < g(0)$$

$$\left. \begin{aligned} f(5) &= 5 + e^5 \\ g(5) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(5) > g(5)$$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, 5) \mid f(c) = g(c)$$

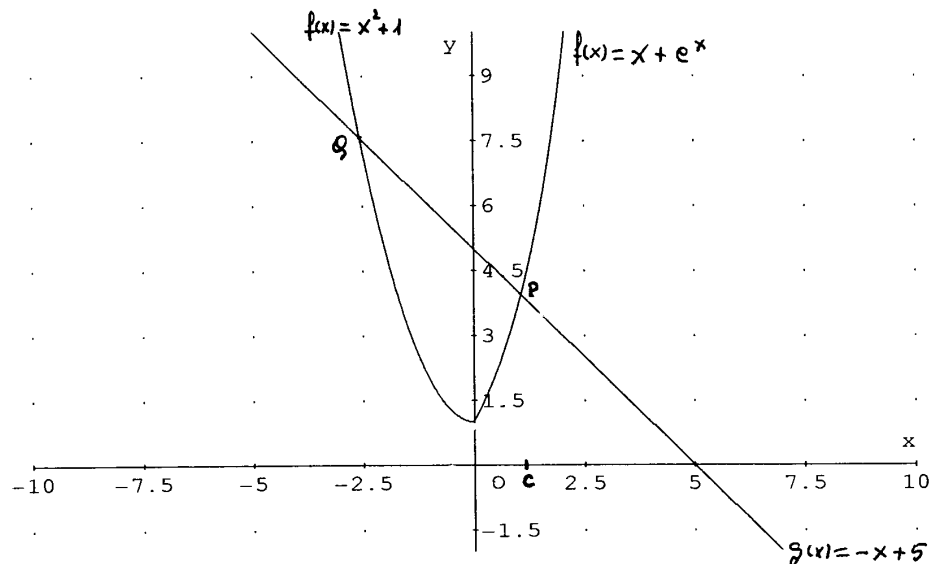
$\hookrightarrow c > 0$

Por tanto, existe $c > 0$ tal que $f(c) = g(c)$ y por tanto, el punto $P(c, f(c)) = (c, g(c))$

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

Para comprobar los resultados obtenidos, dibujemos las gráficas de f y g .

En la gráfica puede observarse como $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en un punto P de abscisa $c > 0$ y en otro punto Q de abscisa negativa.



Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 16}}$$

Analicemos la alternativa (a)

¿Corta $f(x)$ al eje de abscisas?

Veamos:

Domínio de f = Conjunto de puntos x donde $f(x)$ existe.

$f(x)$ no existe cuando $x^2 - 16 \leq 0$

Resolvamos la inequación $x^2 - 16 \leq 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 \leq 0 \\ (x+4)(x-4) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } \begin{cases} x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ x-4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-4 \leq x \leq 4} \\ \text{o bien } \begin{cases} x+4 \leq 0 \Rightarrow x \leq -4 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \text{IMPOSIBLE} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, cuando $x \in [-4, 4]$, $f(x)$ no existe.

$$D_f = (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

Si $f(x)$ cortase al eje de abscisas sería en algún punto $c < -4$ o/y $c > 4$.

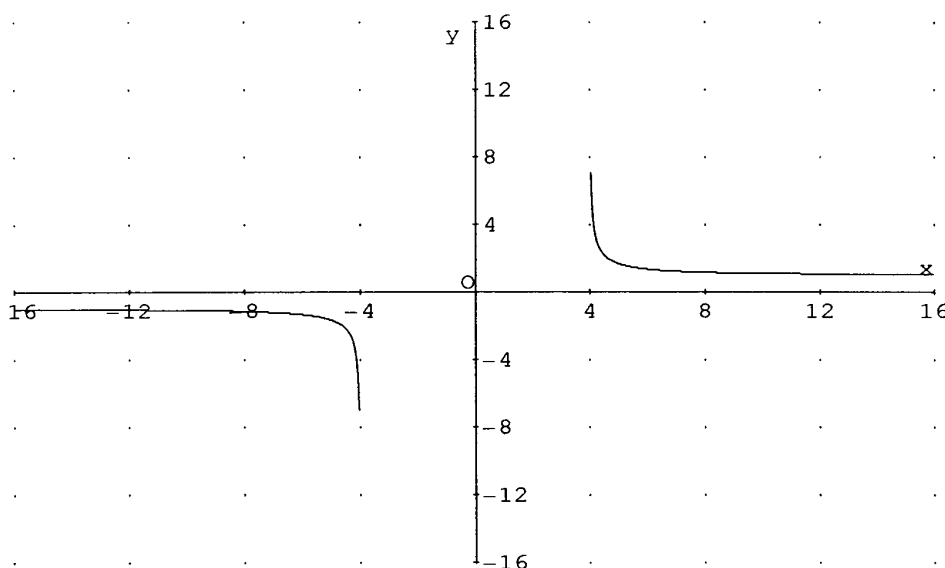
Veamos:

- Si $c < -4 \Rightarrow f(c) = \frac{c}{+\sqrt{c^2-16}} = \frac{\text{NEGATIVO}}{+\sqrt{\text{POSITIVO}}} = \frac{\text{NEGATIVO}}{\text{POSITIVO}} = \text{NEGATIVO} \neq 0$
- Si $c > 4 \Rightarrow f(c) = \frac{c}{+\sqrt{c^2-16}} = \frac{\text{POSITIVO}}{+\sqrt{\text{POSITIVO}}} = \frac{\text{POSITIVO}}{\text{POSITIVO}} = \text{POSITIVO} \neq 0$

Es decir: La función $f(x)$ no corta al eje de abscisas

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

Dibujemos la gráfica de la función



En la gráfica podemos observar como $f(x)$ no corta al eje de abscisas.

Pueden apreciarse dos asíntotas verticales, en $x = -4$ y en $x = 4$ y una asíntota horizontal, el eje de abscisas.

Ejercicio nº 5.-

$$x \cdot e^x = -1 \text{ ecuación.}$$

Nos preguntamos: ¿ $\exists c \in \mathbb{R} \mid c \cdot e^c = -1$?

¿Tiene alguna solución la ecuación dada?

Veamos:

- Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto f(x) = x \cdot e^x \end{array} \right\}$$

- La pregunta ahora es: ¿Corta la gráfica de $f(x) = x \cdot e^x$ a la recta horizontal $y = -1$?
- Si demostramos que la gráfica de $f(x) = x \cdot e^x$ no corta a la recta $y = -1$, hemos demostrado que la ecuación $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución.
Si demostramos que $f(x) = x \cdot e^x$ corta en un único punto a la recta $y = -1$, hemos demostrado que la ecuación $x \cdot e^x = -1$ tiene solución única.
Si demostramos que $f(x) = x \cdot e^x$ corta en más de un punto a la recta $y = -1$, hemos demostrado que la ecuación $x \cdot e^x = -1$ tiene más de una solución.

- Intentemos demostrar alguno de los apartados anteriores:

$f(x) = x \cdot e^x$ es una función continua en todo \mathbb{R} ya que:

$$\left. \begin{array}{l} * \forall a \in \mathbb{R}, f(a) = a \cdot e^a \text{ existe} \\ * \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot e^x = a \cdot e^a \text{ existe} \\ * \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a \cdot e^a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R}$$

$f(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} , ya que $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hallemos los extremos de $f(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$e^x + x \cdot e^x = 0 \Rightarrow e^x \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow 1 + x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

↳ posible extremo.

$$f''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (2 + x)$$

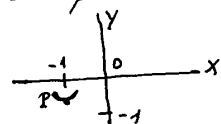
$$\text{para } x = -1 \Rightarrow f''(-1) = e^{-1} \cdot (2 - 1) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \text{En } x = -1 \text{ hay MÍNIMO.}$$

Por tanto: La función $f(x) = x \cdot e^x$ alcanza un MÍNIMO en $x = -1$

$$\text{Valor del mínimo: } f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -1 \cdot \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} > -1$$

Por tanto: El punto $P(-1, -\frac{1}{e})$ es un mínimo único de la función

$f(x)$ y está por "encima" de la recta $y = -1$:



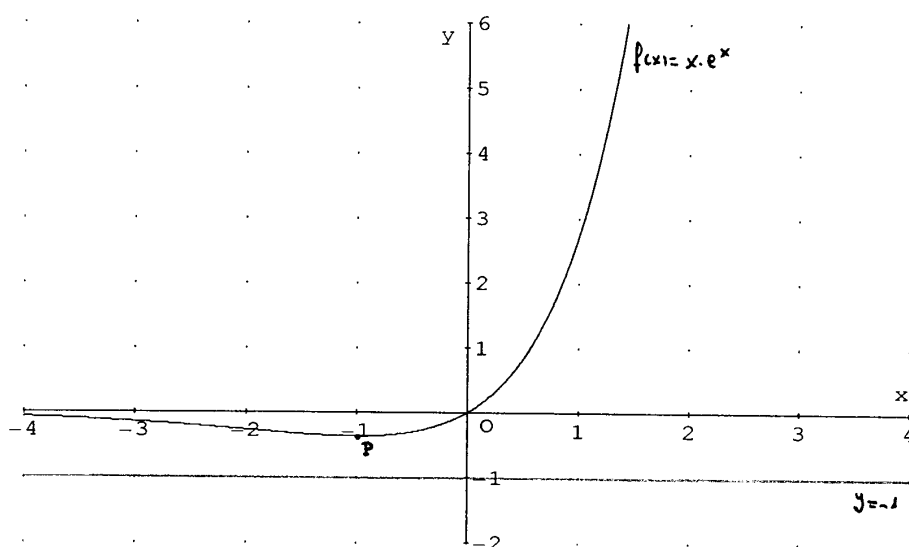
- Por tanto, la función $f(x) = x \cdot e^x$ tiene MINIMO y no tiene MAXIMO.
Tenemos que $f(x) \geq -\frac{1}{e} > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Es decir: $x \cdot e^x > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Es decir: La ecuación $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución.

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

Para comprobar el resultado obtenido, dibujemos la gráfica de $f(x) = x \cdot e^x$.



En la gráfica puede apreciarse como:

(*) : $\forall x \in \mathbb{R}$ es $x \cdot e^x > -1$

(*) : $f(x)$ es creciente en $[-1, +\infty)$. Nótese que $f'(x) = e^x \cdot (1+x) > 0 \quad \forall x \in [-1, +\infty)$
 $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1]$. Nótese que $f'(x) = e^x \cdot (1+x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Hay una rama parabólica por la derecha y hacia $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{e^\infty} = -\frac{\infty}{\infty} = 0^-$. El eje de abscisas es una asíntota horizontal por la izquierda.

En definitiva: $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución

U.N.D.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2002/03

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Resolución aproximada de ecuaciones

Código: ACANMA39.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2002)

El número de raíces de la ecuación $x^5 - 16x + 9 = 0$ es:

- a) 5
- b) 1
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2002)

Dada la función $f(x) = x(1 + \sen x)$, se tiene:

- a) f nunca toma el valor 1
- b) f toma el valor 2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ entonces:

- a) f continua en todo \mathbb{R} excepto en $x = 0$
- b) La gráfica de f corta a la gráfica de la función $g(x) = -x + 5$ en un punto de abscisa $c > 0$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.-

La función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$

- a) Corta al eje de abscisas en un único punto.
- b) No corta al eje de abscisas.
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 5.-

La ecuación $xe^x = -1$

- a) Tiene solución única.
- b) No tiene solución
- c) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA39.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$x^5 - 16x + 9 = 0 \rightarrow \text{ecuación}$$

- Llamamos $p(x) = x^5 - 16x + 9$. Es una función polinómica de grado 5.
- Queremos saber el número de raíces de $p(x)$, es decir, el número de veces que la gráfica de la función $p(x)$ corta al eje de abscisas, o lo que es lo mismo, el número de soluciones o raíces de la ecuación dada $x^5 - 16x + 9 = 0$.

Veamos:

¿Corta la gráfica de $p(x) = x^5 - 16x + 9$ al eje de abscisas?

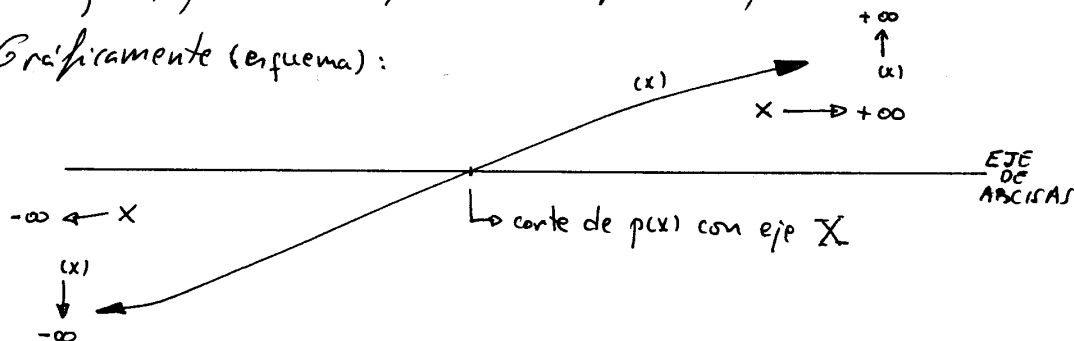
Hagamos un "pequeño" análisis de la función $p(x)$:

- * $p(x)$ es una función continua en todo \mathbb{R} por ser polinómica.
- *
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 16x + 9) = (-\infty)^5 - 16(-\infty) + 9 = -\infty^5 + \infty + 9 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 16x + 9) = \infty^5 - 16\infty + 9 = \infty^5 - \infty + 9 = +\infty \end{aligned} \right\}$$

Es decir:

$p(x)$ es una función continua en todo \mathbb{R} y tal que para valores de x infinitamente grandes, negativos, las imágenes $p(x)$ son infinitamente grandes, negativos y para valores de x infinitamente grandes, positivos, las imágenes $p(x)$ son infinitamente grandes, positivas.

Gráficamente (esquema):



Conclusión: La función $p(x)$ corta al eje de abscisas, al menos, una vez.

Ahora nos preguntamos:

¿Cortará $p(x)$ más de una vez al eje de abscisas?

Veamos:

- Averiguemos dónde es $p(x)$ creciente y dónde decreciente.

$$p'(x) = 5x^4 - 16$$

- * En los x donde $p'(x) > 0$, la función $p(x)$ es creciente.

$$5x^4 - 16 > 0$$

$$5x^4 > 16$$

$$x^4 > \frac{16}{5} \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } x > +\sqrt[4]{\frac{16}{5}} ; x > +\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \\ \text{o bien } x < -\sqrt[4]{\frac{16}{5}} ; x < -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \end{cases}$$

Es decir: $p(x)$ es creciente en $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}) \cup (\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, +\infty)$

- * En los x donde $p'(x) < 0$, la función $p(x)$ es decreciente.

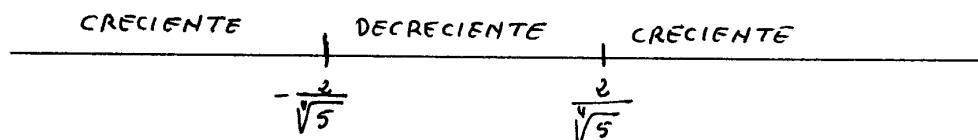
$$5x^4 - 16 < 0$$

$$5x^4 < 16$$

$$x^4 < \frac{16}{5} \Rightarrow -\sqrt[4]{\frac{16}{5}} < x < \sqrt[4]{\frac{16}{5}} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} < x < \frac{2}{\sqrt[4]{5}}$$

Es decir: $p(x)$ es decreciente en $(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}})$

Por tanto:



- Analicemos el signo de $p(x)$ en los puntos $x = -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}$ y en $x = \frac{2}{\sqrt[4]{5}}$

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) &= \left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^5 - 16 \cdot \frac{-2}{\sqrt[4]{5}} + 9 = -\frac{32}{5\sqrt[4]{5}} + \frac{32}{\sqrt[4]{5}} + 9 = \frac{-32 + 160 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} \\ &= \frac{128 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} > 0 \end{aligned}$$

$$p\left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)^5 - 16 \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{5}} + 9 = \frac{32}{5\sqrt[4]{5}} - \frac{32}{\sqrt[4]{5}} + 9 = \frac{32 - 160 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} = \frac{-128 + 45\sqrt[4]{5}}{5\sqrt[4]{5}} < 0$$

Es decir:

$$\left. \begin{array}{l} p\left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) > 0 \\ p\left(\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right) < 0 \\ p(x) \text{ continua en } \mathbb{R} \end{array} \right\} \text{Además, } p(x) \text{ decreciente en } \left(-\frac{2}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right)$$

conclusión: La función $p(x)$ corta una sola vez al eje de abscisas entre $-\frac{2}{\sqrt[5]{5}} > \frac{2}{\sqrt[5]{5}}$.

Ya sabemos que $p(x)$ corta, al menos, dos veces al eje de abscisas.

Por tanto: La alternativa (b) es FALSA.

• Veamos si $p(x)$ corta al eje de abscisas en el intervalo $(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}, +\infty)$

$$* p(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}) < 0$$

$p(x)$ continua en todo \mathbb{R}

$p(x)$ creciente en $(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}, +\infty)$

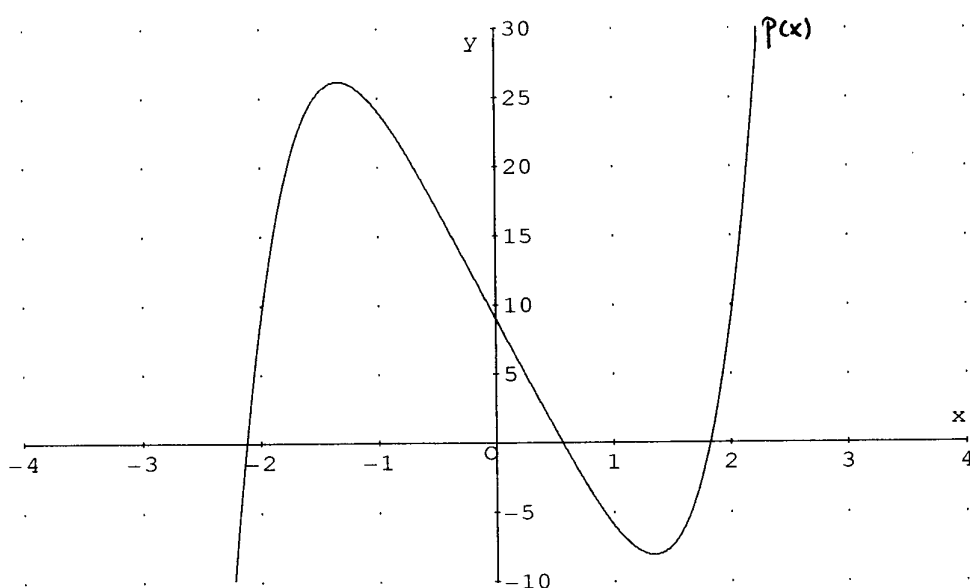
lim $p(x) = +\infty$
 $x \rightarrow +\infty$

$\Rightarrow p(x)$ corta una sola vez al eje de abscisas en $(\frac{2}{\sqrt[5]{5}}, +\infty)$.

conclusión: La función $p(x)$ corta TRES VECES al eje de abscisas, es decir, la ecuación $x^5 - 16x + 9 = 0$ tiene TRES raíces.

conclusión final: La respuesta correcta es (c)

Para comprobar el resultado dibujemos la gráfica de $p(x) = x^5 - 16x + 9$.



En la gráfica de la izquierda observamos como $p(x)$ corta al eje de abscisas en tres puntos.

Ejercicio nº 2.-

$$f(x) = x \cdot (1 + \sen x)$$

Analizamos la alternativa (a)

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 1 \begin{cases} \nearrow \text{Verdadero} \\ \searrow \text{Falso} \end{cases}$$

Se trata de ver si la ecuación $x + x \cdot \sen x = 1$ tiene solución,
es decir, $x + x \cdot \sen x - 1 = 0$ tiene solución.

Veamos:

- Consideremos la función $g(x) = x + x \cdot \sen x - 1$
- Se trata de averiguar si la gráfica de $g(x)$ corta al eje de abscisas.
 - * $g(x) = x + x \cdot \sen x - 1$ es una función continua en todo \mathbb{R}
 - * $g(0) = -1 < 0$
 - * $g(\pi/2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 1 = \pi - 1 > 0$

Es decir:

La función $g(x)$ verifica (Teorema de Bolzano):

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ Es continua en } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \bullet \text{ signo } g(0) \neq \text{signo } g(\pi/2) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid g(c) = 0$$

$$\text{Es decir: } \exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid c + c \cdot \sen c = 1$$

$$\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid f(c) = 1$$

f toma el valor 1 para un $c \in (0, \frac{\pi}{2})$

conclusión: La alternativa (a) es FALSA.

Analizamos la alternativa (b)

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2 \begin{cases} \nearrow \text{Verdadero} \\ \searrow \text{Falso} \end{cases}$$

Se trata de ver si la ecuación $x + x \cdot \sen x = 2$ tiene solución,
es decir, $x + x \cdot \sen x - 2 = 0$

Veamos:

- Consideremos la función $h(x) = x + x \cdot \sin x - 2$
- Se trata de averiguar si la gráfica de $h(x)$ corta al eje de abscisas. Para ello vamos a ver si $h(x)$ verifica el teorema de Bolzano en algún intervalo $[a, b]$.

* $h(x)$ es continua en todo \mathbb{R}

* $h(0) = 0 + 0 - 2 = -2 < 0$

* $h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 2 = \pi - 2 > 0$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} h(x) \text{ continua en } [0, \frac{\pi}{2}] \\ \text{signo } h(0) \neq \text{signo } h(\frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} \Rightarrow \exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid h(c) = 0$$

Es decir: $\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid c + c \cdot \sin c = 2$

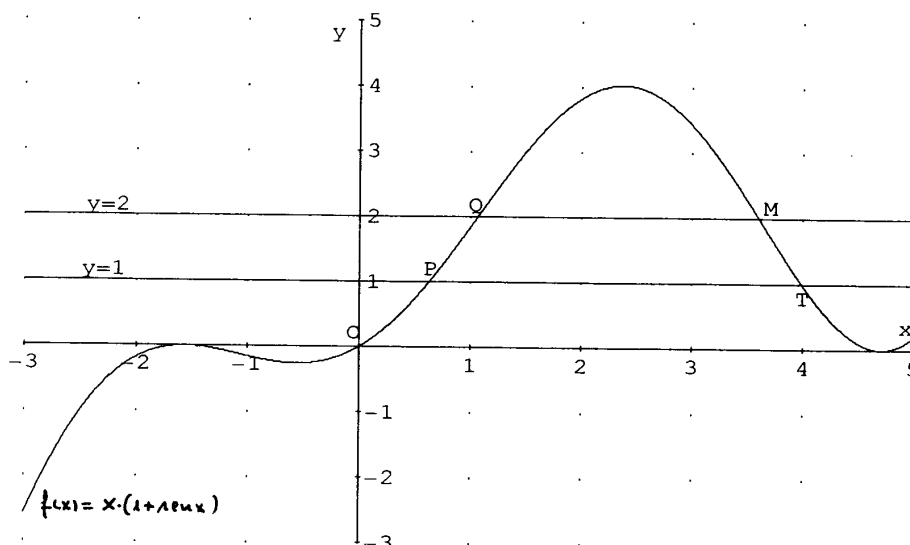
$\exists c \in (0, \frac{\pi}{2}) \mid f(c) = 2$

f toma el valor 2 en un $c \in (0, \frac{\pi}{2})$

Conclusión: La alternativa (b) es VERDADERA

Por tanto: la respuesta correcta es (b)

Para comprobar los resultados obtenidos dibujemos la gráfica de $f(x)$.



En la gráfica de la izquierda observamos como $f(x)$ corta a las rectas $y=1$ (en los puntos P y T) y $y=2$ (en los puntos M y T).

Es decir, $f(x)$ toma los valores 1 y 2 en "al menos" dos puntos para cada caso.

Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Analizamos la alternativa (a)

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 0)$ ya que $f(x) = x^2 + 1$ en $x \in (-\infty, 0)$

$f(x)$ es continua en $[0, +\infty)$ ya que $f(x) = x + e^x$ si $x \in [0, +\infty)$

$\begin{cases} \hookrightarrow \text{continua } y = e^x \\ \hookrightarrow \text{continua } y = x. \end{cases}$

Por tanto, $f(x)$ es continua en $(-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$

Nos preguntamos: ¿Es $f(x)$ continua en $x=0$?

Veamos:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 0^2 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + e^x) = 0 + e^0 = 0 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= f(0) = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0$$

conclusión: $f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} .

La alternativa (a) es FALSA.

Analizamos la alternativa (b)

¿Existe $c \in (0, +\infty)$ tal que $f(c) = g(c)$?

¿Existe $c \in (0, +\infty)$ tal que $c + e^c = -c + 5$?

Veamos:

$f(x)$ es continua en todo \mathbb{R} , y por tanto, en todo $[a, b]$

$g(x)$ es continua en todo \mathbb{R} , y por tanto, en todo $[a, b]$

Consideremos el intervalo $[0, 5]$

$f(x)$ continua en $[0, 5]$

$g(x)$ continua en $[0, 5]$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ g(0) &= 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) < g(0)$$

$$\left. \begin{aligned} f(5) &= 5 + e^5 \\ g(5) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(5) > g(5)$$

$$\Rightarrow \exists c \in (0, 5) \mid f(c) = g(c)$$

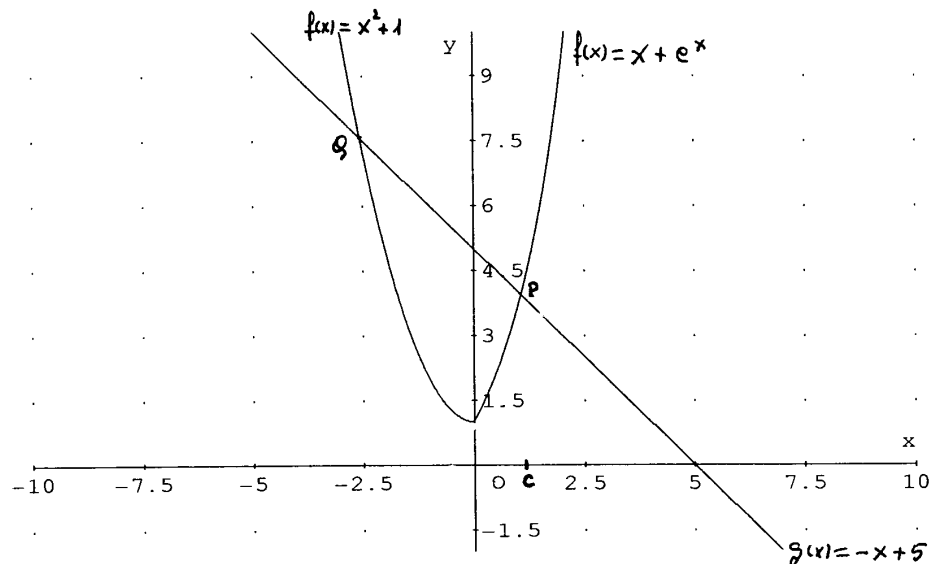
$\hookrightarrow c > 0$

Por tanto, existe $c > 0$ tal que $f(c) = g(c)$ y por tanto, el punto $P(c, f(c)) = (c, g(c))$

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

Para comprobar los resultados obtenidos, dibujemos las gráficas de f y g .

En la gráfica puede observarse como $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en un punto P de abscisa $c > 0$ y en otro punto Q de abscisa negativa.



Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

Analicemos la alternativa (a)

¿Corta $f(x)$ al eje de abscisas?

Veamos:

Domínio de f = Conjunto de puntos x donde $f(x)$ existe.

$f(x)$ no existe cuando $x^2 - 16 \leq 0$

Resolvamos la inequación $x^2 - 16 \leq 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 \leq 0 \\ (x+4)(x-4) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{o bien } \begin{cases} x+4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \\ x-4 \leq 0 \Rightarrow x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-4 \leq x \leq 4} \\ \text{o bien } \begin{cases} x+4 \leq 0 \Rightarrow x \leq -4 \\ x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \text{IMPOSIBLE} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, cuando $x \in [-4, 4]$, $f(x)$ no existe.

$$D_f = (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

Si $f(x)$ cortase al eje de abscisas sería en algún punto $c < -4$ o/y $c > 4$.

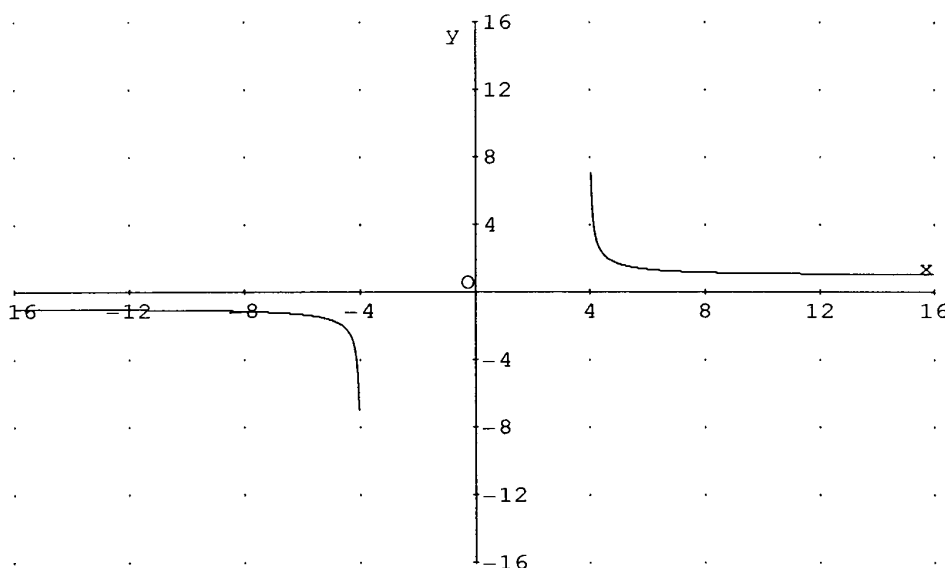
Veamos:

- Si $c < -4 \Rightarrow f(c) = \frac{c}{+\sqrt{c^2-16}} = \frac{\text{NEGATIVO}}{+\sqrt{\text{POSITIVO}}} = \frac{\text{NEGATIVO}}{\text{POSITIVO}} = \text{NEGATIVO} \neq 0$
- Si $c > 4 \Rightarrow f(c) = \frac{c}{+\sqrt{c^2-16}} = \frac{\text{POSITIVO}}{+\sqrt{\text{POSITIVO}}} = \frac{\text{POSITIVO}}{\text{POSITIVO}} = \text{POSITIVO} \neq 0$

Es decir: La función $f(x)$ no corta al eje de abscisas

Conclusión: La respuesta correcta es (6)

Dibujemos la gráfica de la función



En la gráfica podemos observar como $f(x)$ no corta al eje de abscisas.

Pueden apreciarse dos asíntotas verticales, en $x = -4$ y en $x = 4$ y una asíntota horizontal, el eje de abscisas.

Ejercicio nº 5.-

$$x \cdot e^x = -1 \text{ ecuación.}$$

Nos preguntamos: ¿ $\exists c \in \mathbb{R} \mid c \cdot e^c = -1$?

¿Tiene alguna solución la ecuación dada?

Veamos:

- Consideremos la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} x \mapsto f(x) = x \cdot e^x \end{array} \right\}$$

- La pregunta ahora es: ¿Corta la gráfica de $f(x) = x \cdot e^x$ a la recta horizontal $y = -1$?
- Si demostramos que la gráfica de $f(x) = x \cdot e^x$ no corta a la recta $y = -1$, hemos demostrado que la ecuación $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución.
Si demostramos que $f(x) = x \cdot e^x$ corta en un único punto a la recta $y = -1$, hemos demostrado que la ecuación $x \cdot e^x = -1$ tiene solución única.
Si demostramos que $f(x) = x \cdot e^x$ corta en más de un punto a la recta $y = -1$, hemos demostrado que la ecuación $x \cdot e^x = -1$ tiene más de una solución.

- Intentemos demostrar alguno de los apartados anteriores:

$f(x) = x \cdot e^x$ es una función continua en todo \mathbb{R} ya que:

$$\left. \begin{array}{l} * \forall a \in \mathbb{R}, f(a) = a \cdot e^a \text{ existe} \\ * \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot e^x = a \cdot e^a \text{ existe} \\ * \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = a \cdot e^a \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) \text{ continua en } \mathbb{R}$$

$f(x)$ es derivable en todo \mathbb{R} , ya que $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$ existe $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hallemos los extremos de $f(x)$:

$$f'(x) = 0$$

$$e^x + x \cdot e^x = 0 \Rightarrow e^x \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow 1 + x = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

↳ posible extremo.

$$f''(x) = e^x + e^x + x \cdot e^x = e^x \cdot (2 + x)$$

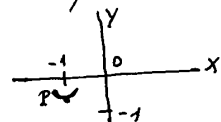
$$\text{para } x = -1 \Rightarrow f''(-1) = e^{-1} \cdot (2 - 1) = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow \text{En } x = -1 \text{ hay MÍNIMO.}$$

Por tanto: La función $f(x) = x \cdot e^x$ alcanza un MÍNIMO en $x = -1$

$$\text{Valor del mínimo: } f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -1 \cdot \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} > -1$$

Por tanto: El punto $P(-1, -\frac{1}{e})$ es un mínimo único de la función

$f(x)$ y está por "encima" de la recta $y = -1$:



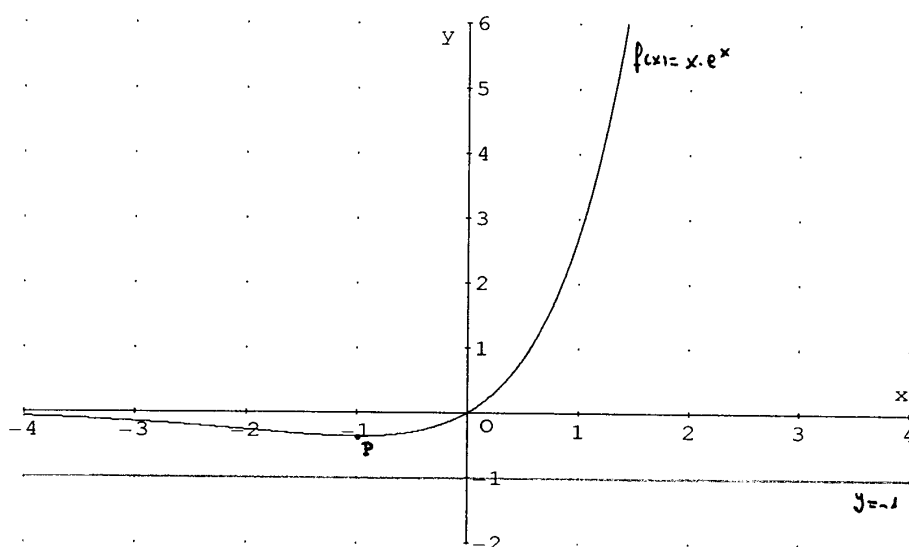
- Por tanto, la función $f(x) = x \cdot e^x$ tiene MINIMO y no tiene MAXIMO.
Tenemos que $f(x) \geq -\frac{1}{e} > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Es decir: $x \cdot e^x > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Es decir: La ecuación $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución.

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

Para comprobar el resultado obtenido, dibujemos la gráfica de $f(x) = x \cdot e^x$.



En la gráfica puede apreciarse como:

(*) : $\forall x \in \mathbb{R}$ es $x \cdot e^x > -1$

(*) : $f(x)$ es creciente en $[-1, +\infty)$. Nótese que $f'(x) = e^x \cdot (1+x) > 0 \quad \forall x \in [-1, +\infty)$
 $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1]$. Nótese que $f'(x) = e^x \cdot (1+x) < 0 \quad \forall x \in (-\infty, -1]$

(*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Hay una rama parabólica por la derecha y hacia $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \cdot \frac{1}{e^\infty} = -\frac{\infty}{\infty} = 0^-$. El eje de abscisas es una asíntota horizontal por la izquierda.

En definitiva: $x \cdot e^x = -1$ no tiene solución

U.N.D.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2002/03

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Interpolación Polinómica

Código: ACANMA40.WPD

Ejercicio nº 1.-

Construir el polinomio interpolador, por el método de Newton, de una función $f(x)$, correspondiente a los nodos :

$$x_0 = 1 ; x_1 = 3 ; x_2 = 7 ; x_3 = 10 ; x_4 = 11$$

y tal que $f(1) = -1 ; f(3) = 53 ; f(7) = 905$
 $f(10) = 2762 ; f(11) = 3709$

Ejercicio nº 2.-

Construir, por el método de Lagrange, el polinomio interpolador de una función $f(t)$, correspondiente a los nodos $t_0 = 0 ; t_1 = 1 ; t_2 = 3$ y $t_3 = 8$, sabiendo que los valores que toma la función son: $f(0) = 2 ; f(1) = 5 ; f(3) = 1$ y $f(8) = 10$

Ejercicio nº 3.-

Construir el polinomio solicitado en el ejercicio anterior, pero utilizando el método de Newton.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en febrero de 2001)

Sea $f: [-2,1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[-2,1]$ tal que $f(-2) = 0, f(-1) = 1$, $f(0) = 1$ y $f(1) = 1$. Sea $p_3(x)$ el polinomio interpolador de tercer grado de la función $f(x)$ relativa a los nodos $x_0 = -2 ; x_1 = -1 ; x_2 = 0$ y $x_3 = 1$
Entonces:

a) $p_3\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$

b) $p_3\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{11}{16}$

c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA40.WPD

Ejercicio nº 1.-

$f(x)$ es una función

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 1 \\ x_1 = 3 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = 10 \\ x_4 = 11 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{cinco nodos.} \\ \text{(no equidistantes)} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_0) = f(1) = -1 \\ f(x_1) = f(3) = 53 \\ f(x_2) = f(7) = 905 \\ f(x_3) = f(10) = 2762 \\ f(x_4) = f(11) = 3709 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Puntos} \left\{ \begin{array}{l} P_1(1, -1) \\ P_2(3, 53) \\ P_3(7, 905) \\ P_4(10, 2762) \\ P_5(11, 3709) \end{array} \right.$$

Buscamos $P_4(x)$: polinomio interpolador de grado 4, de la función $f(x)$ correspondiente a los nodos x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 .

Utilizamos el método de Newton:

$$x_0 = 1 \quad f[x_0]$$

$$f[x_0, x_1]$$

$$x_1 = 3 \quad f[x_1]$$

$$f[x_0, x_1, x_2]$$

$$f[x_1, x_2]$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$$

$$x_2 = 7 \quad f[x_2]$$

$$f[x_1, x_2, x_3]$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$f[x_2, x_3]$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$x_3 = 10 \quad f[x_3]$$

$$f[x_2, x_3, x_4]$$

$$f[x_3, x_4]$$

$$x_4 = 11 \quad f[x_4]$$

Calculamos los valores que forman el "triángulo" anterior:

$$f[x_0] = f(x_0) = f(1) = -1$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{53 + 1}{2} = 27$$

$$f[x_1] = f(x_1) = f(3) = 53$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{905 - 53}{4} = 213$$

$$f[x_2] = f(x_2) = f(7) = 905$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{2762 - 905}{3} = 619$$

$$f[x_3] = f(x_3) = f(10) = 2762$$

$$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4] - f[x_3]}{x_4 - x_3} = \frac{3709 - 2762}{1} = 947$$

$$f[x_4] = f(x_4) = f(11) = 3709$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{213 - 27}{6} = 31$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{619 - 213}{7} = 58$$

$$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3, x_4] - f[x_2, x_3]}{x_4 - x_2} = \frac{947 - 619}{4} = 82$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{58 - 31}{9} = 3$$

$$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_2, x_3, x_4] - f[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1} = \frac{82 - 58}{8} = 3$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, x_4] - f[x_0, x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_0} = \frac{3 - 3}{10} = 0$$

El triángulo en diferencias divididas queda:

$x_0 = 1$	-1			
		27		
$x_1 = 3$	53		31	
		213		3
$x_2 = 7$	905		58	0
		619		3
$x_3 = 10$	2762		82	
		947		
$x_4 = 11$	3709			

El polinomio interpolador tiene la expresión:

$$P_4(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Substituyendo:

$$P_4(x) = -1 + 27 \cdot (x - 1) + 31 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) + 3 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) + 0 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 7) \cdot (x - 10)$$

Operando:

$$P_4(x) = 2 - 4x - 2x^2 + 3x^3$$

Ejercicio n° 2.-

Tenemos cuatro nodos : $n+1=4$ $n=3$

$$t_0=0 ; t_1=1 ; t_2=3 ; t_3=8$$

$$f(t_0)=f(0)=2 ; f(t_1)=f(1)=5 ; f(t_2)=f(3)=1 ; f(t_3)=f(8)=10$$

Tenemos 4 puntos del plano :

$$A_0(0,2) ; A_1(1,5) ; A_2(3,1) ; A_3(8,10)$$

Buscamos $P_3(t)$: polinomio interpolador de grado 3, correspondiente a la función $f(t)$ y relativo a los nodos t_0, t_1, t_2 y t_3 .

Por el método de Lagrange :

$$P_3(t) = \sum_{i=0}^3 \left(f(t_i) \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^3 \frac{(t-t_j)}{(t_i-t_j)} \right) \text{ que desarrollado queda :}$$

$$P_3(t) = f(t_0) \cdot \frac{(t-t_1) \cdot (t-t_2) \cdot (t-t_3)}{(t_0-t_1) \cdot (t_0-t_2) \cdot (t_0-t_3)} + f(t_1) \cdot \frac{(t-t_0) \cdot (t-t_2) \cdot (t-t_3)}{(t_1-t_0) \cdot (t_1-t_2) \cdot (t_1-t_3)} +$$

$$+ f(t_2) \cdot \frac{(t-t_0) \cdot (t-t_1) \cdot (t-t_3)}{(t_2-t_0) \cdot (t_2-t_1) \cdot (t_2-t_3)} + f(t_3) \cdot \frac{(t-t_0) \cdot (t-t_1) \cdot (t-t_2)}{(t_3-t_0) \cdot (t_3-t_1) \cdot (t_3-t_2)}$$

Substituyendo valores :

$$P_3(t) = 2 \cdot \frac{(t-1) \cdot (t-3) \cdot (t-8)}{-1 \cdot (-3) \cdot (-8)} + 5 \cdot \frac{(t-0) \cdot (t-3) \cdot (t-8)}{1 \cdot (-2) \cdot (-7)} + 1 \cdot \frac{(t-0) \cdot (t-1) \cdot (t-8)}{3 \cdot 2 \cdot (-5)} +$$

$$+ 10 \cdot \frac{(t-0) \cdot (t-1) \cdot (t-3)}{8 \cdot 7 \cdot 5}$$

operando :

$$P_3(t) = -2 \cdot \frac{t^3 - 12t^2 + 35t - 24}{24} + 5 \cdot \frac{t^3 - 11t^2 + 24t}{14} - \frac{t^3 - 9t^2 + 8t}{30} +$$

$$+ 10 \cdot \frac{t^3 - 4t^2 + 3t}{280}$$

$$P_3(t) = -\frac{t^3 - 12t^2 + 35t - 24}{12} + 5 \cdot \frac{t^3 - 11t^2 + 24t}{14} - \frac{t^3 - 9t^2 + 8t}{30} + \frac{t^3 - 4t^2 + 3t}{28}$$

$$P_3(t) = \left(-\frac{1}{12} + \frac{5}{14} - \frac{1}{30} + \frac{1}{28}\right)t^3 + \left(1 - \frac{55}{14} + \frac{3}{10} - \frac{1}{7}\right)t^2 + \left(-\frac{35}{12} + \frac{60}{7} - \frac{4}{15} + \frac{3}{28}\right)t + 2$$

$$P_3(t) = \frac{29}{105}t^3 - \frac{97}{35}t^2 + \frac{577}{105}t + 2 \rightarrow \text{polinomio buscado}$$

Comprobemos que la función $P_3(t)$ pasa por los puntos A_0, A_1, A_2 y A_3 .

$$A_0(0,2) \begin{cases} t=0 \\ P_3(0) = 0 - 0 + 0 + 2 = 2 \end{cases} \quad \text{no verifica}$$

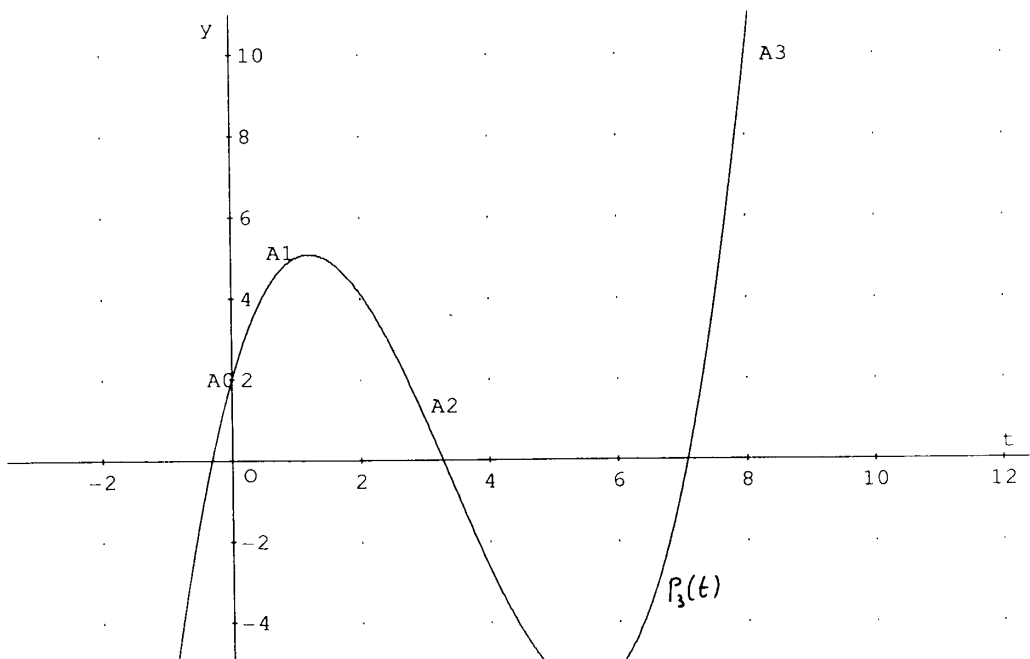
$$A_1(1,5) \begin{cases} t=1 \\ P_3(1) = \frac{29}{105} - \frac{97}{35} + \frac{577}{105} + 2 = 5 \end{cases} \quad \text{no verifica}$$

$$A_2(3,1) \begin{cases} t=3 \\ P_3(3) = \frac{29}{105} \cdot 27 - \frac{97}{35} \cdot 9 + \frac{577}{105} \cdot 3 + 2 = 1 \end{cases} \quad \text{no verifica}$$

$$A_3(8,10) \begin{cases} t=8 \\ P_3(8) = \frac{29}{105} \cdot 512 - \frac{97}{35} \cdot 64 + \frac{577}{105} \cdot 8 + 2 = 10 \end{cases} \quad \text{no verifica.}$$

Vemos que la gráfica de $P_3(t)$ pasa por los cuatro puntos.

Gráficamente:



Hemos de suponer que $\forall t \in [0,8]$ es $f(t) \approx P_3(t)$

Ejercicio n° 3.-

nodos: $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 3$; $t_3 = 8$

$f(t_0) = f(0) = 2$; $f(t_1) = f(1) = 5$; $f(t_2) = f(3) = 1$

$f(t_3) = f(8) = 10$

Buscamos $P_3(t)$: polinomio interpolador de grado 3, de $f(t)$, correspondiente a los nodos t_0, t_1, t_2 y t_3 .

Por el método de Newton:

t_0 $f[t_0]$

$f[t_0, t_1]$

t_1 $f[t_1]$ $f[t_0, t_1, t_2]$

$f[t_1, t_2]$

$f[t_0, t_1, t_2, t_3]$

t_2 $f[t_2]$ $f[t_1, t_2, t_3]$

$f[t_2, t_3]$

t_3 $f[t_3]$

Calculemos los valores correspondientes:

$$\left. \begin{aligned} t_0 = 0 &\Rightarrow f[t_0] = f(t_0) = f(0) = 2 \\ t_1 = 1 &\Rightarrow f[t_1] = f(t_1) = f(1) = 5 \\ t_2 = 3 &\Rightarrow f[t_2] = f(t_2) = f(3) = 1 \\ t_3 = 8 &\Rightarrow f[t_3] = f(t_3) = f(8) = 10 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f[t_0, t_1] &= \frac{f[t_1] - f[t_0]}{t_1 - t_0} = \frac{5 - 2}{1 - 0} = 3 \\ f[t_1, t_2] &= \frac{f[t_2] - f[t_1]}{t_2 - t_1} = \frac{1 - 5}{3 - 1} = \frac{-4}{2} = -2 \\ f[t_2, t_3] &= \frac{f[t_3] - f[t_2]}{t_3 - t_2} = \frac{10 - 1}{8 - 3} = \frac{9}{5} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} f[t_0, t_1, t_2] &= \frac{f[t_1, t_2] - f[t_0, t_1]}{t_2 - t_0} = \frac{-2 - 3}{3 - 0} = \frac{-5}{3} \\ f[t_1, t_2, t_3] &= \frac{f[t_2, t_3] - f[t_1, t_2]}{t_3 - t_1} = \frac{\frac{9}{5} + 2}{8 - 1} = \frac{\frac{19}{5}}{7} = \frac{19}{35} \end{aligned} \right\}$$

$$f[t_0, t_1, t_2, t_3] = \frac{f[t_1, t_2, t_3] - f[t_0, t_1, t_2]}{t_3 - t_0} = \frac{\frac{19}{35} + \frac{5}{3}}{8 - 0} = \frac{\frac{232}{105}}{8} = \frac{29}{105}$$

Por tanto:

$$t_0 = 0 \quad 2$$

$$t_1 = 1 \quad 5 \quad -\frac{5}{3}$$

$$t_2 = 3 \quad 1 \quad -2 \quad \frac{29}{105}$$

$$t_3 = 8 \quad 10 \quad \frac{9}{5}$$

El polinomio interpolador tiene la expresión:

$$P_3(t) = f[t_0] + f[t_0, t_1] \cdot (t - t_0) + f[t_0, t_1, t_2] \cdot (t - t_0) \cdot (t - t_1) + f[t_0, t_1, t_2, t_3] \cdot (t - t_0) \cdot (t - t_1) \cdot (t - t_2) =$$

$$= 2 + 3 \cdot (t - 0) - \frac{5}{3} \cdot (t - 0) \cdot (t - 1) + \frac{29}{105} \cdot (t - 0) \cdot (t - 1) \cdot (t - 3) =$$

$$= 2 + 3t - \frac{5}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + \frac{29}{105}t^3 - \frac{116}{105}t^2 + \frac{29}{35}t =$$

$$= 2 + \left(3 + \frac{5}{3} + \frac{29}{35}\right)t + \left(-\frac{5}{3} - \frac{116}{105}\right)t^2 + \frac{29}{105}t^3 =$$

$$= 2 + \frac{577}{105}t - \frac{97}{35}t^2 + \frac{29}{105}t^3$$

Por tanto:

$$P_3(t) = \frac{29}{105}t^3 - \frac{97}{35}t^2 + \frac{577}{105}t + 2$$

Notese como coincide con el obtenido en el ejercicio nº2.

Ejercicio n° 4. —

$$\left. \begin{array}{l} f: [-2, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) \end{array} \right\} \text{ función continua en } [-2, 1]$$

Sabemos que $f(-2)=0$; $f(-1)=1$; $f(0)=1$ y $f(1)=1$

$P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ es el polinomio interpolador de grado 3, de la función $f(x)$ relativo a los nodos $x_0 = -2$; $x_1 = -1$; $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$.

Notare que los nodos son equidistantes:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = -2 \\ x_1 = x_0 + 1 = -2 + 1 = -1 \\ x_2 = x_1 + 1 = -1 + 1 = 0 \\ x_3 = x_2 + 1 = 0 + 1 = 1 \end{array} \right\} h = 1 = \text{distancia entre nodos.}$$

Construyamos el polinomio interpolador $P_3(x)$.

Para ello utilizaremos la forma de Newton-Gregory en diferencias progresivas, cuya fórmula es:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \sum_{k=0}^3 \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) = \\ &= \frac{\Delta^0 f(x_0)}{0! \cdot 1^0} + \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1! \cdot 1^1} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! \cdot 1^2} (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3! \cdot 1^3} (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = \\ &= f(-2) + \frac{\Delta f(-2)}{1} (x + 2) + \frac{\Delta^2 f(-2)}{2} (x + 2) \cdot (x + 1) + \frac{\Delta^3 f(-2)}{6} (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 0) \end{aligned}$$

Construyamos el triángulo en diferencias progresivas:

Nodos

$x_0 = -2$	$f(x_0)$			
		$\Delta f(x_0)$		
$x_1 = -1$	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
$x_2 = 0$	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	
		$\Delta f(x_2)$		
$x_3 = 1$	$f(x_3)$			

Calculamos los valores del triángulo:

NODOS

$$\begin{array}{ccccccc}
 x_0 = -2 & & 0 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 x_1 = -1 & & 1 & & -1 & & \\
 & & & 0 & & 1 & \\
 x_2 = 0 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & & \\
 x_3 = 1 & & 1 & & & &
 \end{array}$$

El polinomio queda:

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= 0 + 1 \cdot (x+2) - \frac{1}{2}(x+2) \cdot (x+1) + \frac{1}{6}(x+2) \cdot (x+1) \cdot x = \\
 &= x+2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x = \\
 &= 1 + (1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3})x + 0x^2 + \frac{1}{6}x^3 = 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^3
 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_3(x) = 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Para } x = -\frac{3}{2} \text{ en } P_3(-\frac{3}{2}) &= 1 - \frac{1}{6} \cdot (-\frac{3}{2}) + \frac{1}{6} \cdot (-\frac{3}{2})^3 = 1 + \frac{1}{4} - \frac{9}{16} = \\
 &= \frac{16+4-9}{16} = \frac{11}{16}
 \end{aligned}$$

Es decir: $\boxed{P_3(-\frac{3}{2}) = \frac{11}{16}} \Rightarrow \textcircled{a} \text{ y } \textcircled{c} \text{ son falsas}$

Conclusión: la alternativa correcta es \textcircled{b}

NOTA: Para alejar dudas, podemos comprobar lo siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 x_0 = -2 &\Rightarrow P_3(x_0) = P_3(-2) = 1 + \frac{2}{6} - \frac{8}{6} = \frac{6+2-8}{6} = 0 = f(-2) \\
 x_1 = -1 &\Rightarrow P_3(x_1) = P_3(-1) = 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 1 = f(-1) \\
 x_2 = 0 &\Rightarrow P_3(x_2) = P_3(0) = 1 = f(0) \\
 x_3 = 1 &\Rightarrow P_3(x_3) = P_3(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1 = f(1)
 \end{aligned} \right\} \underline{\underline{\text{O.K.}}}$$

$P_3(x) = 1 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^3$ es el polinomio buscado.

U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2002/03***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Interpolación Polinómica

Código: ACANMA41.WPD

Ejercicio nº 1.-

De una función $f(x)$ se conocen los valores que toma para los números equidistantes $x_0 = -2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$, siendo estos valores los siguientes: $f(x_0) = 0$; $f(x_1) = 3$; $f(x_2) = 7$ y $f(x_3) = 1$

Determinar el polinomio interpolador de grado $n=3$, de la función $f(x)$, relativo a los nodos $x_0 = -2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$ y $x_3 = 4$, utilizando el método de Newton-Gregory para nodos equidistantes, en diferencias progresivas.

Ejercicio nº 2.-

Resolver el ejercicio anterior, utilizando el método de Newton-Gregory para nodos equidistantes, en diferencias regresivas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANM41.WPD

Ejercicio nº 1.-

Tenemos:

<u>NODOS</u>	<u>FUNCION</u>	<u>PUNTOS</u>	
$x_0 = -2$	$f(x_0) = f(-2) = 0$	$A_0(-2, 0)$	} Buscamos $P_3(x)$
$x_1 = 0$	$f(x_1) = f(0) = 3$	$A_1(0, 3)$	
$x_2 = 2$	$f(x_2) = f(2) = 7$	$A_2(2, 7)$	
$x_3 = 4$	$f(x_3) = f(4) = 1$	$A_3(4, 1)$	

$n+1 = 4$ nodos $h =$ distancia entre nodos $= 2$ $n = 3$

$P_3(x)$ = polinomio interpolador de grado 3 de la función $f(x)$, relativo a los nodos x_0, x_1, x_2, x_3

Debemos utilizar el método de Newton-Gregory en diferencias progresivas. Construyamos el "triángulo" correspondiente:

$x_0 = -2$	$f(x_0)$			
		$\Delta f(x_0)$		
$x_1 = 0$	$f(x_1)$		$\Delta^2 f(x_0)$	
		$\Delta f(x_1)$		$\Delta^3 f(x_0)$
$x_2 = 2$	$f(x_2)$		$\Delta^2 f(x_1)$	
		$\Delta f(x_2)$		
$x_3 = 4$	$f(x_3)$			

Substituyendo por los valores correspondientes:

$x_0 = -2$	0			
		3		
$x_1 = 0$	3		1	
		4		-11
$x_2 = 2$	7		-10	
		-6		
$x_3 = 4$	1			

Para obtener el polinomio $P_3(x)$, aplicamos la fórmula:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! \cdot h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \quad h=2$$

La fórmula anterior, desarrollada queda:

$$\begin{aligned}P_3(x) &= \frac{\Delta^0 f(-2)}{0! \cdot 2^0} + \frac{\Delta^1 f(-2)}{1! \cdot 2^1} (x+2) + \frac{\Delta^2 f(-2)}{2! \cdot 2^2} (x+2) \cdot (x-0) + \frac{\Delta^3 f(-2)}{3! \cdot 2^3} (x+2) \cdot (x-0) \cdot (x-2) = \\&= \frac{0}{1 \cdot 1} + \frac{3}{1 \cdot 2} (x+2) + \frac{1}{2 \cdot 4} (x+2) \cdot x - \frac{11}{6 \cdot 8} (x+2) \cdot x \cdot (x-2) = \\&= \frac{3}{2} (x+2) + \frac{1}{8} (x+2)x - \frac{11}{48} (x+2) \cdot x \cdot (x-2) = \\&= \frac{3}{2}x + 3 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{11}{48}x^3 + \frac{11}{12}x = 3 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{11}{12}\right)x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3\end{aligned}$$

$$P_3(x) = 3 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 \rightarrow \text{polinomio buscado.}$$

Comprobación:

La función $P_3(x)$ tiene una gráfica que debe pasar por los puntos del plano $A_0(-2, 0)$; $A_1(0, 3)$; $A_2(2, 7)$ y $A_3(4, 1)$.

Es decir:

$$\begin{cases}P_3(-2) = 3 + \frac{8}{3} \cdot (-2) + \frac{1}{8} \cdot (-2)^2 - \frac{11}{48} \cdot (-2)^3 = 3 - \frac{16}{3} + \frac{1}{2} + \frac{11}{6} = \frac{18-32+3+11}{6} = 0 \\P_3(0) = 3 + \frac{8}{3} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 0^2 - \frac{11}{48} \cdot 0^3 = 3 \\P_3(2) = 3 + \frac{8}{3} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2^2 - \frac{11}{48} \cdot 2^3 = 3 + \frac{16}{3} + \frac{1}{2} - \frac{11}{6} = \frac{18+32+3-11}{6} = 7 \\P_3(4) = 3 + \frac{8}{3} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 4^2 - \frac{11}{48} \cdot 4^3 = 3 + \frac{32}{3} + 2 - \frac{44}{3} = \frac{9+32+6-44}{3} = 1\end{cases}$$

Hemos comprobado que $P_3(x)$ verifica los puntos A_0, A_1, A_2 y A_3 , es decir, $P_3(x)$ está bien calculado.

Ejercicio n.º 2.-

Construyamos el "triángulo" en diferencias repetidas:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_0 = -2 & f(x_0) & & & \\
 & & \nabla f(x_1) & & \\
 x_1 = 0 & f(x_1) & & \nabla^2 f(x_2) & \\
 & & \nabla f(x_2) & & \nabla^3 f(x_3) \\
 x_2 = 2 & f(x_2) & & \nabla^2 f(x_3) & \\
 & & \nabla f(x_3) & & \\
 x_3 = 4 & f(x_3) & & &
 \end{array}$$

Substituyendo por los valores correspondientes:

$$\begin{array}{rclcl}
 x_0 = -2 & 0 & & & \\
 & & 3 & & \\
 x_1 = 0 & 3 & & 1 & \\
 & & 4 & & -11 \\
 x_2 = 2 & 7 & & -10 & \\
 & & -6 & & \\
 x_3 = 4 & 1 & & &
 \end{array}$$

Para obtener $P_3(x)$ aplicamos la fórmula:

$$P_3(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{\nabla^k f(x_3)}{k! \cdot h^k} \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_{n-i}) \quad h=2$$

Desarrollando la fórmula anterior:

$$\begin{aligned}
 P_3(x) = & \frac{\nabla^0 f(x_3)}{0! \cdot 2^0} + \frac{\nabla^1 f(x_3)}{1! \cdot 2^1} (x - x_3) + \frac{\nabla^2 f(x_3)}{2! \cdot 2^2} (x - x_3) \cdot (x - x_2) + \\
 & + \frac{\nabla^3 f(x_3)}{3! \cdot 2^3} (x - x_3) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_1)
 \end{aligned}$$

$$P_3(x) = f(4) + \frac{\nabla f(4)}{2} (x - 4) + \frac{\nabla^2 f(4)}{8} (x - 4) \cdot (x - 2) + \frac{\nabla^3 f(4)}{48} (x - 4) \cdot (x - 2) \cdot x =$$

$$= 1 - \frac{6}{2} (x - 4) - \frac{10}{8} (x - 4) \cdot (x - 2) - \frac{11}{48} (x - 4) \cdot (x - 2) \cdot x =$$

$$= 1 - 3x + 12 - \frac{5}{4} x^2 + \frac{15}{2} x - 10 - \frac{11}{48} x^3 + \frac{11}{8} x^2 - \frac{11}{6} x =$$

$$= 3 + (-3 + \frac{15}{2} - \frac{11}{6})x + (-\frac{5}{4} + \frac{11}{8})x^2 - \frac{11}{48}x^3 = 3 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3$$

Es decir:

$$P_3(x) = 3 + \frac{8}{3}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3$$

Notese que se obtiene el mismo resultado que en el ejercicio anterior.

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2003/04

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Límites de funciones

Código: ACANMA42.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2003)

El valor de $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + x^2) L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$ es :

- a) 4
- b) 2
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2003)

El valor de $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ es :

- a) e^2
- b) e
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2003)

Sea $A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 6x + 4}{-x^4 + 4x - 3}$. Entonces:

- a) $A = \frac{1}{2}$
- b) $A = -1$
- c) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 2003)

Sea $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$. Entonces :

- a) $A = \frac{1}{2}$
- b) $A = 2$
- c) Ninguna de las anteriores.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA42.WPD

Ejercicio nº1.-

Se trata de hallar el límite de la función $f(x) = (2x + x^2) \cdot L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$ cuando $x \rightarrow +\infty$

Veamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x + x^2) \cdot L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \right] = (2 \cdot \infty + \infty^2) \cdot L\left(1 + \frac{2}{\infty^2}\right) = \\ = \infty \cdot L(1 + 0) = \infty \cdot L1 = \infty \cdot 0 = \text{INDETERMINADO}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x + x^2) \cdot L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}{\frac{1}{2x + x^2}} = \frac{L(1 + 0)}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0} = \text{INDET.}$$

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{0}{0} \text{ siendo } \begin{cases} g(x) = L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \\ h(x) = \frac{1}{2x + x^2} \end{cases}$$

Como $g(x) = L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)$ y $h(x) = \frac{1}{2x + x^2}$ son funciones continuas y derivables en los intervalos $(0, +\infty)$, podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

Por tanto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1 + \frac{2}{x^2}} \cdot \frac{-4x}{x^4}}{\frac{-(2 + 2x)}{(2x + x^2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-4}{x^3 + 2x}}{\frac{-2 \cdot (1 + x)}{(2x + x^2)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot (2x + x^2)^2}{(x^3 + 2x) \cdot (1 + x)} = \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 8x^3 + 8x^2}{x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(2x + x^2) \cdot L\left(1 + \frac{2}{x^2}\right) \right] = 2}$$

→ Significa que para valores de x infinitamente grandes positivos, las imágenes $f(x)$ están infinitamente próximos a 2.

Podemos comprobar con calculadora que $f(1000) = 2.00399799 \dots \approx 2$

CONCLUSIÓN: La respuesta correcta es (6)

Ejercicio nº 2.-

Se trata de hallar el límite de $f(x) = (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ cuando $x \rightarrow 0^+$
Veamos:

- Para $x=0$ vemos que $f(0) = (e^0 + 0)^{\frac{1}{0}} \notin \mathbb{R}$ porque $\frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$
- Se trata de ver el comportamiento de la función $f(x)$ para valores de x infinitamente próximos a 0 por su derecha, es decir, cuando $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = (e^{0^+} + 0^+)^{\frac{1}{0^+}} = (1 + 0)^{+\infty} = 1^{+\infty} = \text{INDETERMINADO}$$

Salvemos esta indeterminación:

- Llamamos $A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \leftarrow$ Buscamos A

- Tomamos logaritmo neperiano: $\ln A = \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

- Recordemos: "El logaritmo de un límite es igual al límite del logaritmo".

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \ln (e^x + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln (e^x + x)}{x} = \frac{\ln (e^0 + 0)}{0^+} = \\ &= \frac{\ln 1}{0^+} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO} \end{aligned}$$

- Por tanto: $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln (e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{0}{0}$ siendo $\begin{cases} g(x) = \ln (e^x + x) \\ h(x) = x \end{cases}$

- Las funciones $g(x) = \ln (e^x + x)$ y $h(x) = x$ son continuas y derivables en cualquier intervalo del tipo $(0, 0^+)$, por lo que podemos aplicar la regla de L'Hôpital.

- $\ln A = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{e^x + x} \cdot (e^x + 1)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{e^0 + 1}{e^0 + 0} = \frac{1+1}{1} = 2$

- Por tanto: $\ln A = 2 \Rightarrow e^{\ln A} = e^2$

Es decir:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^2$$

\rightarrow Significa que para valores de x infinitamente próximos a 0 por su derecha, las imágenes $f(x)$ están infinitamente próximas a e^2

Comprobemos con calculadora:

$$x = 0.001 \rightarrow f(0.001) = (e^{0.001} + 0.001)^{\frac{1}{0.001}} = 1.0020005^{1000} = 7.37799428... \approx e^2$$

CONCLUSIÓN: La respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 6x + 4}{-x^4 + 4x - 3} = \frac{2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 + 4}{-1^4 + 4 \cdot 1 - 3} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

- Como el polinomio $2x^3 - 6x + 4$ se anula para $x=1$, podemos asegurar que la división $2x^3 - 6x + 4 : x-1$ es exacta.
- Como el polinomio $-x^4 + 4x - 3$ se anula para $x=1$, podemos asegurar que la división $-x^4 + 4x - 3 : x-1$ es exacta.
- Efectuemos ambas divisiones por el método de Ruffini:

$$2x^3 - 6x + 4 : x-1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 0 & -6 & 4 \\ & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$c(x) = 2x^2 + 2x - 4 \rightarrow \text{cociente}$$

$$-x^4 + 4x - 3 : x-1$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ & & -1 & -1 & -1 & 3 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$d(x) = -x^3 - x^2 - x + 3 \rightarrow \text{cociente}$$

$$\Rightarrow 2x^3 - 6x + 4 = (x-1) \cdot (2x^2 + 2x - 4)$$

dividendo divisor cociente

$$\Rightarrow -x^4 + 4x - 3 = (x-1) \cdot (-x^3 - x^2 - x + 3)$$

dividendo divisor cociente

- Substituímos:

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 6x + 4}{-x^4 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (2x^2 + 2x - 4)}{(x-1) \cdot (-x^3 - x^2 - x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{-x^3 - x^2 - x + 3} = \frac{0}{0} = \text{INDETERM.}$$

- Nuevamente aplicamos Ruffini:

$$2x^2 + 2x - 4 : x-1 \rightarrow \text{exacta}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 2 & 2 \\ & & -2 \\ \hline & 2 & 4 \end{array}$$

$$e(x) = 2x + 4 \rightarrow \text{cociente}$$

$$-x^3 - x^2 - x + 3 : x-1 \rightarrow \text{exacta}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ & & -1 & -2 & -3 \\ \hline & -1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$f(x) = -x^2 - 2x - 3 \rightarrow \text{cociente}$$

$$-x^3 - x^2 - x + 3 = (x-1) \cdot (-x^2 - 2x - 3)$$

- Substituímos:

$$A = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 6x + 4}{-x^4 + 4x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \cdot (2x + 4)}{(x-1) \cdot (-x^2 - 2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 4}{-x^2 - 2x - 3} = \frac{2 \cdot 1 + 4}{-1^2 - 2 \cdot 1 - 3} = \frac{6}{-6} = -1$$

Por tanto: $A = -1$

CONCLUSIÓN: La respuesta correcta es **(6)**

Ejercicio nº 4.-

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sec x}{x^3} = \frac{\tan 0 - \sec 0}{0^3} = \frac{0 - 1}{0} = \frac{-1}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

Salvemos la indeterminación:

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sec x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\tan x}{x^3} - \frac{\sec x}{x^3} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{x^3} =$$
$$= \frac{\tan 0}{0^3} - \frac{\sec 0}{0^3} = \frac{0}{0} - \frac{1}{0} = \text{Indeterminado}$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x^3} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)'}{(x^3)'} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sec x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3x^2} =$$

↳ Podemos aplicar L'Hôpital en ambos límites

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3x^2 \cos^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 \cos^2 x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 \cos^2 x} - \frac{\cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - 1^3}{0^2 \cdot 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{0} = \text{Indeterm.}$$

$$A = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{1}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^3 x)'}{(x^2 \cos^2 x)'} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{2x \cos^2 x - x^2 \cdot 2 \cos x \cdot \sin x} =$$

↳ podemos aplicar L'Hôpital

$$= \frac{3}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x \cos x - x^2 \sin x} = \frac{3}{6} \cdot \frac{0 \cdot 1}{0 \cdot 1 - 0^2 \cdot 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{0} = \text{Indeterminado.}$$

$$A = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos x}{x \cos x - x^2 \sin x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x}{\cos x - x \cdot \sin x - 2x \cdot \sin x - x^2 \cos x} =$$

↳ Aplicamos L'Hôpital

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 0 - \sin^2 0}{\cos 0 - 0 \cdot \sin 0 - 2 \cdot 0 \cdot \sin 0 - 0^2 \cdot \cos 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - 0}{1 - 0 - 0 - 0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

Por tanto: $\boxed{A = \frac{1}{2} = 0'5}$

Comprobemos con calculadora: $x = 0'001$ radianes $\rightarrow \frac{\tan 0'001 - \sec 0'001}{0'001^3} = \underline{\underline{0'499996}}$

CONCLUSIÓN: la respuesta correcta es (a)

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2003)

Dada la función $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si } x < 1 \\ \lambda & \text{si } x = 1 \\ \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{se tiene:}$$

- a) f es continua si $\lambda = \frac{3}{2}$
- b) f es continua si $\lambda = 0$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2003)

La ecuación $x + \cos 2x = \pi$:

- a) Posee al menos una raíz en el intervalo cerrado $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- b) No posee ninguna raíz en el intervalo cerrado $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{x^2-1} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ Entonces:

- a) La función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$.
- b) La función $f(x)$ es continua en $x = -1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA43.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} Lx^2 + \text{sen} \frac{\pi}{x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ L & \text{si } x = 1 \\ \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- $f(x) = Lx^2 + \text{sen} \frac{\pi}{x}$ existe y es continua $\forall x \in (0, 1)$ y $\forall L \in \mathbb{R}$.
Por tanto, $f(x)$ es continua en $(0, 1)$ para cualquier valor L .
- $f(x) = L$ si $x = 1$, es decir, $f(1) = L$.
- $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ existe y es continua $\forall x \in (1, +\infty)$, sea cual sea el valor que tome L .

- * El único punto en "conflicto" es $x = 1$. La continuidad de $f(x)$ en $x = 1$ puede depender del valor que tome L .

Veamos:

$$f(x) \text{ es continua en } x = 1 \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = L \end{cases}$$

- * Debemos hallar los límites laterales de $f(x)$ en $x = 1$

Veamos:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(Lx^2 + \text{sen} \frac{\pi}{x} \right) = L \cdot 1^2 + \text{sen} \frac{\pi}{1} = L \cdot 1 + \text{sen} \pi = L + 0 = L$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1 - 1}{1^2 - 1} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminado}$$

Salvemos esta indeterminación factorizando numerador y denominador:

$$2x^2 - x - 1 : x - 1 \text{ división exacta.}$$

$$x^2 - 1 : x - 1 \text{ división exacta.}$$

$$\left. \begin{array}{r|rrr} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = (x - 1) \cdot (2x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

$$\text{Entonces: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1) \cdot (2x + 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x + 1}{x + 1} = \frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

- * Debe ocurrir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = L$

Es decir, debe ocurrir que $L = \frac{3}{2}$

CONCLUSIÓN: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 2.-

$$x + \cos 2x = \pi \rightarrow \text{ecuación}$$

¿Existe un $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ tal que $\alpha + \cos 2\alpha = \pi$?

Veamos:

- Consideremos la función $f(x) = x + \cos 2x - \pi$

Es evidente que $f(x)$ es una función continua en todo $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

ya que:

$$f(x) = x + \cos 2x - \pi$$

$$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{función constante (continua)} \\ \rightarrow \text{función continua} \\ \rightarrow \text{función continua} \end{array} \right\} \text{ suma de tres funciones continuas}$$

- Podemos definir la función $f(x)$ en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\left. \begin{array}{l} f: [\frac{\pi}{2}, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = x + \cos 2x - \pi \end{array} \right\} \text{ función continua en } [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

$$\text{Además: } \left. \begin{array}{l} f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + \cos \pi - \pi = -1 - \frac{\pi}{2} < 0 \\ f(\pi) = \pi + \cos 2\pi - \pi = \cos 2\pi = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{signo } f(\frac{\pi}{2}) \neq \text{signo } f(\pi)$$

- Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano para la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\text{Por tanto: } \exists \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \mid f(\alpha) = 0$$

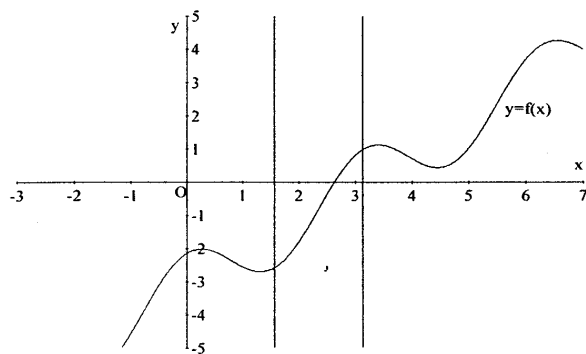
$$\text{Es decir: } \exists \alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \mid \alpha + \cos 2\alpha - \pi = 0 ; \boxed{\alpha + \cos 2\alpha = \pi}$$

La ecuación $x + \cos 2x = \pi$ posee al menos una raíz en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

CONCLUSIÓN: La alternativa correcta es (a)

Veamos la gráfica de la función $f(x) = x + \cos 2x - \pi$ para comprobar que corta al eje de abscisas en un punto entre $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$.

En la gráfica puede apreciarse como $f(x)$ corta al eje de abscisas en un punto entre $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \pi$



Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{x^2-1} & \text{si } x \neq -1 \text{ y } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Ya sabemos que $f(-1) = 0$, pero hemos de averiguar qué ocurre en las proximidades de $x = -1$ (con $x \neq 0$), es decir, en $x = -1^+$ y $x = -1^-$.

Para ello debemos hallar el límite de $f(x)$ cuando $x \rightarrow -1$.

Veamos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

Por tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ (existe)} \\ f(-1) = 0 \text{ (existe)} \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ es continua en } x = -1}$$

↳ De aquí se deduce también que en $x = -1$ no hay asíntota vertical.

CONCLUSIÓN: La alternativa correcta es (6)

U.N.E.D (Ceuta)

Curso escolar 2003/04

ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática

ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1º

TEMA: Integrales. Cálculo de primitivas. Integral definida.

Código: ACANMA48.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2003)

Sea $F(x) = \int_1^{x^3+3} x \, dt$ para todo $x > 0$. La derivada de la función F para $x = 2$ es:

- a) $-6 + L \, 7$
- b) $2 \cdot L \, 7$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2003)

Sea $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{2x} x \, \sin t \, dt$ para todo $x > 0$.

La derivada de la función F en el punto $x = \pi$ es:

- a) $F'(\pi) = -1 - \frac{\pi}{2}$
- b) $F'(\pi) = 1 + \frac{\pi}{2}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2003)

Sea $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x \cos 3x \, dx$ es:

- a) $I = \frac{3}{10}$
- b) $I = -\frac{3}{5}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA48.WPD

Ejercicio nº 1.-

$$\left. \begin{array}{l} F: (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto F(x) = \int_1^{x^2+3} x \cdot L t \, dt \end{array} \right\} F(x) = x \int_1^{x^2+3} L t \, dt = x \cdot G(x)$$

↳ Hemos sacado x fuera de la integral

Buscamos $F'(x)$ para $x=2$, es decir, $F'(2)$

- Consideremos las siguientes funciones:

$$\left. \begin{array}{l} g: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto g(t) = L t \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} G: (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G(x) = \int_1^{x^2+3} L t \, dt \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} G_1: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto G_1(x) = \int_1^x g(t) \, dt = \int_1^x L t \, dt \end{array} \right\} \Rightarrow G_1'(x) = L x$$

$$\left. \begin{array}{l} G_2: [1, 6] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto z = G_2(x) = x^2 + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = 2x$$

- Consideremos ahora la composición $G_1 \circ G_2$:

$$(G_1 \circ G_2)(x) = G_1(G_2(x)) = G_1(z) = \int_1^z g(t) \, dt = \int_1^{x^2+3} L t \, dt = G(x)$$

- Derivamos $G(x)$:

$$G'(x) = (G_1 \circ G_2)'(x) = [G_1(G_2(x))]' = [G_1(z)]' = \frac{dG_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = L z \cdot 2x = L(x^2+3) \cdot 2x$$

- Derivamos $F(x)$:

$$F'(x) = [x \cdot G(x)]' = 1 \cdot G(x) + x \cdot G'(x) = \int_1^{x^2+3} L t \, dt + x \cdot [2x \cdot L(x^2+3)]$$

Es decir: $F'(x) = 2x^2 \cdot L(x^2+3) + \int_1^{x^2+3} L t \, dt$

Para $x=2 \Rightarrow F'(2) = 2 \cdot 2^2 \cdot L(2^2+3) + \int_1^{2^2+3} L t \, dt = 8 \cdot L 7 + \int_1^7 L t \, dt = 8L 7 + I$

Debemos resolver $I = \int_1^7 L t \, dt$

Para ello debemos resolver la integral $J = \int L t \, dt$

Por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = L t \\ dv = dt \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{1}{t} dt \\ v = \int dt = t \end{array} \right.$$

Entonces:

$$J = \int L t \, dt = \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du = t \cdot L t - \int t \cdot \frac{1}{t} \, dt = t \cdot L t - \int dt = t \cdot L t - t$$

$$I = \int_1^7 L t \, dt = \left[t \cdot L t - t \right]_1^7 = 7 \cdot L 7 - 7 - (1 \cdot L 1 - 1) = 7 \cdot L 7 - 7 - 0 + 1 = 7 \cdot L 7 - 6$$

En definitiva:

$$F'(2) = 8 \cdot L 7 + 7 \cdot L 7 - 6 = 15 \cdot L 7 - 6 = \boxed{-6 + 15 \cdot L 7 = F'(2)}$$

Conclusión: la alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 2.-

$$\left. \begin{array}{l} F: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow F(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{2x} x \, n e^{nt} \, dt \end{array} \right\} F(x) = x \cdot \int_{\frac{x}{2}}^{2x} n e^{nt} \, dt = x \cdot G(x)$$

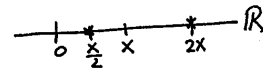
↳ Hemos sacado x fuera de la integral.

Busquemos $F'(x)$ y en concreto $F'(\pi)$

• Definimos las siguientes funciones:

$$\left. \begin{array}{l} G: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow G(x) = \int_{\frac{x}{2}}^{2x} n e^{nt} \, dt \end{array} \right\} G(x) = \int_0^{2x} n e^{nt} \, dt - \int_0^{\frac{x}{2}} n e^{nt} \, dt = H(x) - K(x)$$

Notene que si $x > 0$ es $\frac{x}{2} < 2x$, es decir,



avendo:

$$\left. \begin{array}{l} H: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow H(x) = \int_0^{2x} n e^{nt} \, dt \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} K: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow K(x) = \int_0^{\frac{x}{2}} n e^{nt} \, dt \end{array} \right\}$$

• La derivada de la función $F(x)$ será:

$$F'(x) = [x \cdot G(x)]' = 1 \cdot G(x) + x \cdot G'(x) = G(x) + x \cdot G'(x) = H(x) - K(x) + x \cdot [H'(x) - K'(x)]$$

- Necesitamos hallar $H'(x)$ y $K'(x)$

Busquemos $H'(x)$

$$\text{Definimos las funciones: } \left. \begin{array}{l} h: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow h(t) = \sin t \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_1: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow H_1(x) = \int_0^x \sin t \, dt \end{array} \right\} \Rightarrow H_1'(x) = \sin x$$

$$\left. \begin{array}{l} H_2: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow z = H_2(x) = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = H_2'(x) = 2$$

Construyamos la función compuesta $H_1 \circ H_2$:

$$(H_1 \circ H_2)(x) = H_1(H_2(x)) = H_1(z) = \int_0^z \sin t \, dt = \int_0^{2x} \sin t \, dt = H(x)$$

Derivando:

$$H'(x) = (H_1 \circ H_2)'(x) = [H_1(H_2(x))]' = [H_1(z)]' = \frac{dH_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sin z \cdot 2 = 2 \cdot \sin 2x$$

Busquemos $K'(x)$

$$\text{Definimos las funciones: } \left. \begin{array}{l} K: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow K(t) = \sin t \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} K_1: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow K_1(x) = \int_0^x \sin t \, dt \end{array} \right\} K_1'(x) = \sin x$$

$$\left. \begin{array}{l} K_2: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow K_2(x) = \frac{x}{2} = z \end{array} \right\} \Rightarrow z' = \frac{dz}{dx} = K_2'(x) = \frac{1}{2}$$

Construyamos la función compuesta $K_1 \circ K_2$:

$$(K_1 \circ K_2)(x) = K_1(K_2(x)) = K_1(z) = \int_0^z \sin t \, dt = \int_0^{\frac{x}{2}} \sin t \, dt = K(x)$$

Derivando:

$$K'(x) = (K_1 \circ K_2)'(x) = [K_1(K_2(x))]' = [K_1(z)]' = \frac{dK_1}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \sin z \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$$

- La derivada de $G(x)$ será:

$$G'(x) = H'(x) - K'(x) = 2 \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$$

- Sustituyendo en $F'(x)$:

$$F'(x) = \int_0^{2x} \sin t \, dt - \int_0^{\frac{x}{2}} \sin t \, dt + 2x \cdot \sin 2x - \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}$$

para $x = \pi \Rightarrow F'(\pi) = \int_0^{2\pi} \cos t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt + 2\pi \cdot \cos 2\pi - \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{2} = I_1 - I_2 + 0 - \frac{\pi}{2}$
 $\hookrightarrow \cos 2\pi = 1 \quad \hookrightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$

Hallamos I_1, I_2 :

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = [-\sin t]_0^{2\pi} = -\sin 2\pi + \sin 0 = -0 + 0 = 0 \\ I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [-\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\sin \frac{\pi}{2} + \sin 0 = -1 + 0 = -1 \end{aligned} \right\}$$

Por tanto: $F'(\pi) = 0 - (-1) + 0 - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}$ $F'(\pi) = 1 - \frac{\pi}{2}$

conclusión: la alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 3.-

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$$

Resolvamos la integral $J = \int \cos 2x \cdot \cos 3x \, dx$

Por partes: $\left. \begin{aligned} u &= \cos 2x \\ dv &= \cos 3x \, dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} du &= -2 \sin 2x \, dx \\ v &= \int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} \sin 3x \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } J &= \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du = \cos 2x \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + \int \frac{1}{3} \sin 3x \cdot 2 \sin 2x \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x + \frac{2}{3} \int \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx \\ &= \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x + \frac{2}{3} K \end{aligned}$$

Resolvamos la integral $K = \int \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$

Por partes: $\left. \begin{aligned} u &= \sin 2x \\ dv &= \sin 3x \, dx \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} du &= 2 \cos 2x \, dx \\ v &= \int \sin 3x \, dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{aligned} \right.$

$$\begin{aligned} \text{Entonces } K &= \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du = \sin 2x \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) + \int \frac{1}{3} \cos 3x \cdot 2 \cos 2x \, dx = \\ &= -\frac{1}{3} \sin 2x \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} \int \cos 3x \cdot \cos 2x \, dx = \\ &= -\frac{1}{3} \sin 2x \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} J \end{aligned}$$

\hookrightarrow Integral inicial.

Por tanto:

$$J = \frac{1}{3} \cdot \sin 3x \cdot \cos 2x + \frac{2}{3} K = \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x + \frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} \sin 2x \cdot \cos 3x + \frac{2}{3} J \right] =$$
$$= \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x - \frac{2}{9} \sin 2x \cdot \cos 3x + \frac{4}{9} J$$

Restando $\frac{4}{9} J$ al miembro izquierdo:

$$J - \frac{4}{9} J = \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x - \frac{2}{9} \sin 2x \cdot \cos 3x$$

$$\frac{5}{9} J = \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x - \frac{2}{9} \sin 2x \cdot \cos 3x$$

$$J = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x \cdot \cos 2x - \frac{9}{5} \cdot \frac{2}{9} \sin 2x \cdot \cos 3x = \frac{3}{5} \sin 3x \cdot \cos 2x - \frac{2}{5} \sin 2x \cdot \cos 3x$$

$$I = \left[\frac{3}{5} \sin 3x \cdot \cos 2x - \frac{2}{5} \sin 2x \cdot \cos 3x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$
$$= \frac{3}{5} \sin 3\pi \cdot \cos 2\pi - \frac{2}{5} \sin 2\pi \cdot \cos 3\pi - \frac{3}{5} \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \cos \pi + \frac{2}{5} \sin \pi \cdot \cos \frac{3\pi}{2} =$$
$$= \frac{3}{5} \cdot 0 \cdot 1 - \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot (-1) - \frac{3}{5} \cdot (-1) \cdot (-1) + \frac{2}{5} \cdot 0 \cdot 0 = -\frac{3}{5}$$

Por tanto, $\boxed{I = -\frac{3}{5}}$

Conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2003)

La serie $\sum \frac{(n!)^3 \lambda^n}{(3n)!}$ es :

- a) Convergente si $0 < \lambda < 81$
- b) Divergente si $\lambda > 27$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2003)

La serie $\sum \frac{3^n}{n!}$ es :

- a) Divergente.
- b) Convergente.
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 2003)

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \lambda \cos^2 n}{n^2 + 2}$, donde λ es un número real :

- a) Converge sólo cuando $0 \leq \lambda < 1$
- b) No converge para $\lambda = 1$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en septiembre de 2003)

La serie $\sum \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n \operatorname{sen}^{2n} \alpha}{n^2}$ es :

- a) Divergente si $\alpha = \frac{\pi}{3}$
- b) Divergente si $\alpha = \frac{\pi}{6}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Indicación: $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA49.WPD

Ejercicio nº 1.-

$\sum \frac{(n!)^3 \lambda^n}{(3n)!}$ es una serie cuyo término general es $a_n = \frac{(n!)^3 \lambda^n}{(3n)!}$

Como $a_n > 0$ ($\lambda > 0$), se trata de una serie de términos positivos. Las series de términos positivos son SUMABLES, es decir, son convergentes o divergentes.

Para estudiar el carácter de la serie dada, aplicaremos el criterio del cociente (o criterio de D'Alembert)

Veamos:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{[(n+1)!]^3 \lambda^{n+1}}{[3(n+1)]!}}{\frac{(n!)^3 \lambda^n}{(3n)!}} = \frac{[(n+1)!]^3 \lambda^{n+1} \cdot (3n)!}{[3(n+1)]! \cdot \lambda^n \cdot (n!)^3} = \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot (n+1)! \cdot \lambda \cdot (3n)!}{[3(n+1)]! \cdot n! \cdot n! \cdot n!} = \\ &\quad \xrightarrow{\text{Simplificamos } \lambda} \frac{(n+1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot \lambda \cdot (3n)!}{[3(n+1)]! \cdot n! \cdot n! \cdot n!} = \frac{(n+1)^3 \cdot \lambda \cdot (3n)!}{(3n+3)!} = \\ &= \frac{(n+1)^3 \cdot \lambda \cdot (3n)!}{(3n+3) \cdot (3n+2) \cdot (3n+1) \cdot (3n)!} = \frac{\lambda (n^3 + 3n^2 + 3n + 1)}{27n^3 + 54n^2 + 33n + 6} = \frac{\lambda n^3 + 3\lambda n^2 + 3\lambda n + \lambda}{27n^3 + 54n^2 + 33n + 6} \end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda n^3 + 3\lambda n^2 + 3\lambda n + \lambda}{27n^3 + 54n^2 + 33n + 6} = \frac{\lambda}{27}$$

Analizamos la situación:

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda}{27} < 1$ la serie es convergente.
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda}{27} > 1$ la serie es divergente.

Observamos que $\frac{\lambda}{27} > 1 \Leftrightarrow \lambda > 27 \Leftrightarrow$ la serie diverge

Por tanto: La serie diverge si $\lambda > 27$

Conclusión: La alternativa correcta es (b)

Ejercicio nº 2.-

$\sum \frac{3^n}{n!}$ es una serie de término general $a_n = \frac{3^n}{n!} > 0$ (términos positivos)

$$\begin{aligned}\sum \frac{3^n}{n!} &= \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!} + \frac{3^6}{6!} + \frac{3^7}{7!} + \frac{3^8}{8!} + \dots = \\ &= 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120} + \frac{729}{720} + \frac{2187}{5040} + \frac{6561}{40320} + \dots\end{aligned}$$

A "simple vista" vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, es decir, la serie PUEDE ser CONVERGENTE, es decir, aún no podemos decir.

Para ver el carácter de la serie utilizaremos el criterio del cociente o criterio de D'Alembert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \frac{3 \cdot n!}{(n+1) \cdot n!} = \frac{3}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = \frac{3}{+\infty+1} = \frac{3}{+\infty} = 0 < 1 \Rightarrow \text{La serie CONVERGE}$$

Por tanto: $\sum \frac{3^n}{n!} = S = \text{finito}$ (la serie es convergente)

Conclusión: La alternativa correcta es (b)

Ejercicio nº 3.-

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \lambda \cos^2 n}{n^2 + 2} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \text{ Término general } a_n = \frac{1 + \lambda \cos^2 n}{n^2 + 2}$$

λ puede ser positivo o negativo

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ es $1 + \lambda \cos^2 n = n^2$ finito ya que $0 \leq \cos^2 n \leq 1$

$$\text{Por tanto: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \lambda \cos^2 n}{n^2 + 2} = \frac{n^2 \text{ finito}}{+\infty} = 0$$

Aún no podemos decir sobre el carácter de la serie.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \lambda \cos^2 n}{n^2 + 2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2} + \frac{\lambda \cos^2 n}{n^2 + 2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda \cos^2 n}{n^2 + 2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2} + \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 2} = A + B$$

• Analicemos la serie $A = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 2}$

La serie armónica generalizada es $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$
 es convergente si $\alpha > 1$

Si $\alpha = 2$ es $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ convergente.

En nuestro caso es:

<u>SERIE A</u>		<u>SERIE ARMÓNICA GENERALIZADA CON $\alpha=2$</u>	
$\frac{1}{3}$	<	$\frac{1}{1}$	} \Rightarrow Por el criterio de comparación, podemos asegurar que la serie A es convergente.
$\frac{1}{6}$	<	$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{11}$	<	$\frac{1}{9}$	
\vdots	\vdots	\vdots	
$\frac{1}{n^2+2}$	<	$\frac{1}{n^2}$	

• Analicemos la alternativa (b). Es decir, $\lambda = 1$

$\lambda = 1 \Rightarrow B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2 + 2}$ serie de términos positivos en términos
 general $b_n = \frac{\cos^2 n}{n^2 + 2}$

Observamos que $\cos^2 n$ es positivo y tal que $0 \leq \cos^2 n \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 Comparamos la serie B con la serie A:

<u>SERIE B</u>		<u>SERIE A</u>	
$\frac{\cos^2 1}{3}$	\leq	$\frac{1}{3}$	} \Rightarrow Como la serie A es convergente, la serie B también lo es (Criterio de comparación).
$\frac{\cos^2 2}{6}$	\leq	$\frac{1}{6}$	
\vdots	\vdots	\vdots	
$\frac{\cos^2 n}{n^2 + 2}$	\leq	$\frac{1}{n^2 + 2}$	

Es decir:

• Si $\lambda = 1$ la serie **B** converge $\Rightarrow A+B = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\lambda \cos^2 n}{n^2+2}$ converge

(La suma de dos series convergentes es convergente)

Por tanto: La alternativa (b) es FALSA

• Analicemos la alternativa (a)

Dice que la serie converge sólo cuando $0 \leq \lambda < 1$, lo cual es falso ya que cuando $\lambda = 1$ también converge.

Por tanto: La alternativa (a) es FALSA

conclusión: La alternativa correcta es (c)

Ejercicio n° 4.-

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n \cdot \text{sen}^{2n} \alpha}{n^2}$$

• Analicemos la alternativa (a)

$\alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \Rightarrow \text{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2})^{2n}}{n^2}$ serie de términos positivos

Simplifiquemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n \cdot \frac{(\sqrt{3})^{2n}}{2^{2n}}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n \cdot \sqrt{3}^{2n}}{2^{2n} \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n \sqrt{(3^n)^2}}{(2^2)^n \cdot n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^n 3^n}{4^n \cdot n^2}$$

se trata de una serie de términos positivos de término general de los sumandos $a_n = \frac{(2+\frac{1}{n})^n 3^n}{4^n \cdot n^2}$

Para ver el carácter de la serie apliquemos el criterio de la raíz o de Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} l < 1 \Rightarrow \text{la serie converge} \\ l = 0 \Rightarrow \text{caso dudoso} \\ l > 1 \Rightarrow \text{la serie diverge} \end{cases}$$

Veamos:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2+\frac{1}{n})^n \cdot 3^n}{4^n \cdot n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{\frac{(2+\frac{1}{n})^n \cdot 3^n}{4^n}} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\frac{1}{n}) \cdot 3}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (2+\frac{1}{n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{3}{4} \cdot (2+\frac{1}{\infty}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4} \cdot (2+0) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}\end{aligned}$$

Debemos resolver $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}}$

Utilizaremos el método del logaritmo:

El límite de la sucesión $u_n = \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}}$ cuando $n \rightarrow +\infty$ coincide con el límite de la función $f(x) = \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$ cuando $x \rightarrow +\infty$

Por tanto: Buscamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = 0^0 = \text{Indeterminado}$

Llamamos $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$

Tomamos logaritmos: $\begin{aligned} \ln A &= \ln \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x^2}}{x} = \frac{\ln 0}{+\infty} = \frac{-\infty}{+\infty} = \text{Indeterminado} \end{aligned}$

Aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\ln A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\ln \frac{1}{x^2} \right)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot (x^{-2})'}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} \cdot (-2x^{-3})}{1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^{-5}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x^5} = \frac{-2}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

$\ln A = 0 \Rightarrow e^0 = A \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = 1$

Es decir: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$

Por tanto: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ La serie diverge si $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

Ejercicio nº 1.- (propuesto en septiembre de 2003)

$$\text{Sean } \left. \begin{array}{l} f:[1,2] \longrightarrow R \\ x \longrightarrow f(x) = x^2 - 1 \end{array} \right\} \text{ y } \left. \begin{array}{l} g:[1,2] \longrightarrow R \\ x \longrightarrow g(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2} \end{array} \right\} \text{ dos funciones}$$

definidas para todo $x \in [1, 2]$.

- Las gráficas de ambas funciones se cortan en dos puntos.
- Las gráficas de las funciones f y g tienen un único punto de corte.
- Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 2.-

Sea la ecuación $x^3 + x^2 + x = 1$. Entonces:

- Esa ecuación tiene más de una solución.
- Tiene solución única y $\alpha = 0'5$ es una aproximación de ella con un error menor que $0'1$.
- Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.-

Si aplicamos el método de la secante (o de las partes proporcionales) una vez a la ecuación $x^3 + x^2 + x = 1$ para encontrar una solución aproximada en el intervalo $[0, 1]$, el valor encontrado es:

- $c = 0'3$
- $c = 0'5$
- Ninguna de las anteriores.

Ejercicio nº 4.-

Si aplicamos el método de Newton (o de la tangente) una vez a la ecuación $x^3 + x^2 + x = 1$ para encontrar una solución aproximada en el intervalo $[0, 1]$, el valor encontrado es:

- $c = 0'5$
- $c = \frac{2}{3}$
- Ninguna de las anteriores

Ejercicio nº 1.-

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 - 1 \\ g(x) = \sin \frac{\pi x}{2} \end{array} \right\} \forall x \in [1, 2]$$

- Analicemos la función $f(x) = x^2 - 1$ y su gráfica en $[1, 2]$

Se trata de una función polinómica de grado 2 (continua)

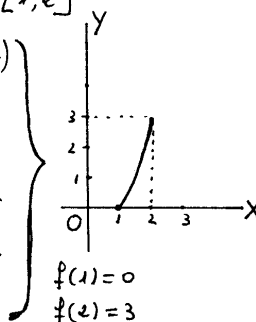
Su gráfica es una parábola del tipo \cup $V = \text{vértice}$

A simple vista debe apreciarse que $V(0, -1)$

Como está definida en $[1, 2]$, se trata de un trozo de parábola

A simple vista debe apreciarse que es estrictamente creciente.

A la derecha está dibujada su gráfica aproximada



- Analicemos la función $g(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ y su gráfica en $[1, 2]$

Se trata de una función continua en todo \mathbb{R} y, por tanto, en $[1, 2]$

$$\left. \begin{array}{l} g(1) = \sin \frac{\pi}{2} = 1 \\ g(2) = \sin \pi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{y} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{x} \end{array} \quad \begin{array}{l} g(x) \text{ pasa del punto A} \\ \text{al punto B de una} \\ \text{forma continua.} \end{array}$$

Nos preguntamos: ¿será $g(x)$ estrictamente decreciente en $[1, 2]$?

Veamos: $g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2}$

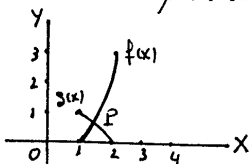
$$\forall x \in [1, 2] \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2} \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos \frac{\pi x}{2} \leq 0 \Rightarrow \overset{\text{positivo}}{\frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \leq 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2} \leq 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \quad \forall x \in (1, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{La función } g(x) \text{ es estrictamente decreciente en } [1, 2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \text{y} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{x} \end{array} \quad \text{es la gráfica de } g(x) \text{ en } [1, 2]$$

- De los dos puntos anteriores, deducimos que:



Es evidente que se cortan en un único punto

$$P(x, 1) \text{ cuando } \begin{cases} 1 < x < 2 \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

conclusión: La alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 2.-

$$x^3 + x^2 + x = 1 \rightarrow \text{ecuación}$$

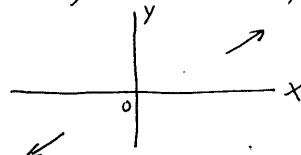
$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \text{es la misma ecuación}$$

Consideremos la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

Se trata una función polinómica de grado 3 y, por tanto, es continua en todo \mathbb{R} .

Es evidente que $f(x)$ corta al eje de abscisas "alguna" vez. En efecto:

$$\left. \begin{aligned} f(-\infty) &= (-\infty)^3 + (-\infty)^2 - \infty - 1 = -\infty < 0 \\ f(+\infty) &= \infty^3 + \infty^2 + \infty - 1 = +\infty > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



Es decir: $\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid f(\alpha) = 0$

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1 \rightarrow \alpha = \text{solución de la ecuación.}$$

Ya sabemos que la ecuación tiene solución. ¿Será única?

Veamos:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \rightarrow \text{es la derivada de } f(x) \text{ (es una parábola U)}$$

Para $x=0$ es $f'(0) = 1 > 0$, es decir, la derivada es positiva en un valor de x , concretamente en $x=0$

Nos preguntamos: ¿Será positiva $\forall x \in \mathbb{R}$?

$$\text{Veamos: } f'(x) = 0$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow \text{ecuación de 2º grado}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{6} \notin \mathbb{R}$$

Es decir, la parábola $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ no corta al eje X

Es decir, la parábola $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es x

Es decir, $f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Es decir, $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ es estrictamente creciente en \mathbb{R} .

Conclusión: La función $f(x)$ corta al eje de abscisas en un único punto.

La ecuación $x^3 + x^2 + x = 1$ tiene solución única.

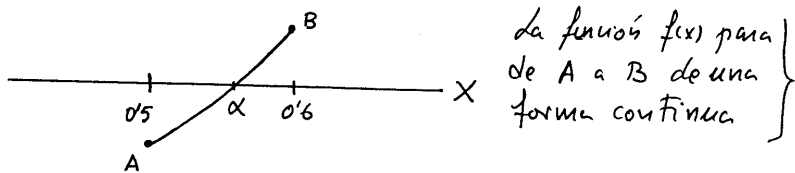
Por tanto: La alternativa (a) es FALSA

Analicemos la alternativa (b)

$$x = 0.5 = \frac{5}{10} \Rightarrow f\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{125}{1000} + \frac{25}{100} + \frac{5}{10} - 1 = 0.125 + 0.25 + 0.5 - 1 < 0$$

$$x = 0.6 = \frac{6}{10} \Rightarrow f\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{216}{1000} + \frac{36}{100} + \frac{6}{10} - 1 = 0.216 + 0.36 + 0.6 - 1 > 0$$

Por tanto:



$\alpha \in (0.5, 0.6)$ es la auténtica solución de la ecuación

Es evidente que $|\alpha - 0.5| < 0.1$

Considerando $\alpha = 0.5$ como solución cometemos un error menor que 0.1.

Conclusión: la alternativa correcta es (6)

Ejercicio nº 3.-

$$x^3 + x^2 + x = 1 \rightarrow \text{ecuación}$$

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \text{es la misma ecuación}$$

Llamemos $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ función. Es continua en todo \mathbb{R}

$$\left. \begin{array}{l} f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^3 + x^2 + x - 1 \end{array} \right\} \text{continua en } [0, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \text{B} \\ \bullet \\ 1 \\ \hline 0 \text{---} x \\ \text{A} \bullet \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} f(x) \text{ para de A a B de} \\ \text{una forma continua.} \end{array} \right\}$$

Lo anterior nos garantiza que $\exists \alpha \in (0, 1) \mid f(\alpha) = 0$, es decir, $\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0$, es decir, la ecuación tiene solución en el intervalo $(0, 1)$

$$\text{Además: } f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$$

Significa que $f(x)$ es estrictamente creciente en el intervalo $[0, 1]$, lo cual nos indica que la solución es única.

Hallemos una aproximación de α por el método de la secante:

$$\left. \begin{array}{l} A(0, f(0)) = (0, -1) \\ B(1, f(1)) = (1, 1) \end{array} \right\} r: \text{recta que pasa por A y B}$$

$$y+1 = \frac{2+1}{1-0} (x-0) \rightarrow \text{ecuación de } r$$

$$y+1 = 3x; \quad \boxed{y = 3x-1} \rightarrow \text{Ecuación de la recta } r \text{ que pasa por los puntos } A \text{ y } B.$$

Halleemos el punto de corte de r con el eje X .

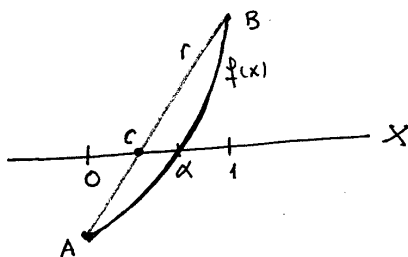
$$y=0 \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}=0.\bar{3}$$

Es decir: r corta al eje X en el punto $P(0.\bar{3}, 0)$

Consideramos $\boxed{c = 0.\bar{3}}$ \rightarrow aproximación de la solución de la ecuación.

Conclusión: la alternativa correcta es (a)

Gráficamente:



Ejercicio nº 4.-

$$x^3 + x^2 + x = 1$$

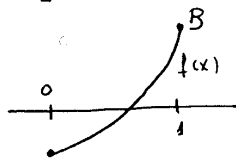
$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \rightarrow \text{ecuación}$$

Consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$

En el ejercicio anterior quedó claro que $f(x)$ corta al eje de abscisas en un único punto (dentro de intervalo $(0,1)$)

Veamos si se cumplen las condiciones para aplicar el método de Newton o de la tangente a $f(x)$ en $[0,1]$

- $f(0) \cdot f(1) = -1 \cdot 2 = -2 < 0$
- $\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \\ f''(x) = 6x + 2 \end{array} \right\} \text{ existen en todo } x \in [0,1]$
- $\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1] \\ f''(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1] \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Caso}$



Es decir, la gráfica de $f(x)$ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y cóncava hacia arriba en $[0,1]$

En este caso:

$r \rightarrow$ recta que pasa por el punto $B(1,2)$ y es tangente a $f(x)$ en B .

$$\left. \begin{array}{l} B(1,2) \rightarrow \text{punto} \\ m = f'(1) = \text{pendiente de } r \end{array} \right\} \Rightarrow y - 2 = m(x - 1)$$

$$y - 2 = 6(x - 1)$$

$$\boxed{y = 6x - 4} \rightarrow \text{ecuación de } r$$

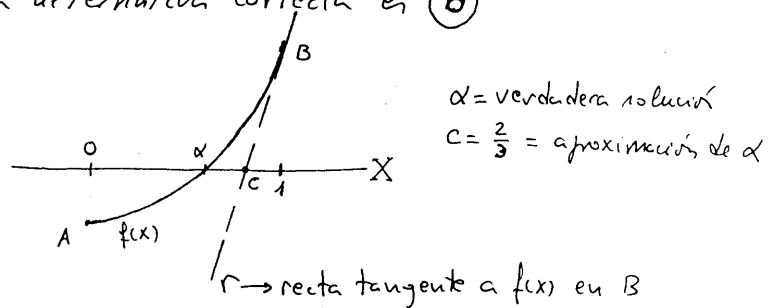
Hallamos el punto de corte de r con el eje de abscisas:

$$y = 0 \Rightarrow 6x - 4 = 0 \Rightarrow 6x = 4 \Rightarrow \boxed{x = \frac{2}{3} = 0.\bar{6}}$$

Consideramos $\boxed{c = \frac{2}{3} = 0.\bar{6}}$ como aproximación de la solución de la ecuación.

Conclusión: la alternativa correcta es **(6)**

Gráficamente:



Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2003)

Sea $p_3(x)$ el polinomio de tercer grado cuya gráfica pasa por los puntos $(-2, 3)$, $(0, 0)$, $(1, 3)$ y $(2, 1)$. Entonces:

- a) $p_3(-1) = -3$
- b) $p_3(3) = -12$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en febrero de 2003)

Si $p_2(x)$ es el polinomio interpolador de grado 2 de la función $f(x) = \cos x$ relativo a los nodos $x_0 = -\pi$, $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$, entonces:

- a) $p_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{8}$
- b) $p_2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{8}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3.- (propuesto en febrero de 2003)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2} + \cos(\pi x)$ y sea $p_2(x)$ el polinomio interpolador de la función $f(x)$ relativo a los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Entonces :

- a) $p_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
- b) $p_2\left(\frac{1}{2}\right) = -2$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 4.- (propuesto en febrero de 2003)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = -\sin x + \cos x$ y sea $p(x)$ el polinomio interpolador de la función $f(x)$ relativo a los nodos $x_0 = \pi$, $x_1 = \frac{3\pi}{2}$, $x_2 = 2\pi$, $x_3 = \frac{5\pi}{2}$. La derivada de $p(x)$ verifica:

- a) $p'(\pi) = \frac{5}{\pi}$
- b) $p'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$
- c) Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 1.-

Consideremos el problema del siguiente modo:

- $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ es una función polinómica de grado 3
- $x_0 = -2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$ son 4 nodos
- $P_3(x_0) = P_3(-2) = 3 \rightarrow$ ya que la gráfica de $P_3(x)$ pasa por $A(-2,3)$
- $P_3(x_1) = P_3(0) = 0 \rightarrow$ ya que la " de $P_3(x)$ " por $O(0,0)$
- $P_3(x_2) = P_3(1) = 3 \rightarrow$ ya que la " de $P_3(x)$ " por $B(1,3)$
- $P_3(x_3) = P_3(2) = 1 \rightarrow$ ya que la " de $P_3(x)$ " por $C(2,1)$
- Vamos a construir el polinomio $P_3(x)$ mediante la FORMA DE NEWTON EN DIFERENCIAS DIVIDIDAS.

Veamos:

x_0	$P_3[x_0]$			
		$P_3[x_0, x_1]$		
x_1	$P_3[x_1]$		$P_3[x_0, x_1, x_2]$	
		$P_3[x_1, x_2]$		
x_2	$P_3[x_2]$			$P_3[x_0, x_1, x_2, x_3]$
		$P_3[x_1, x_2, x_3]$		
x_3	$P_3[x_3]$			

En nuestro caso:

-2	3			
		$\frac{0-3}{0-(-2)} = -\frac{3}{2}$		
0	0		$\frac{3-(-\frac{3}{2})}{1-(-2)} = \frac{3}{2}$	
		$\frac{3-0}{1-0} = 3$		$\frac{-\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2-(-2)} = -1$
1	3		$\frac{-2-3}{2-0} = -\frac{5}{2}$	
		$\frac{1-3}{2-1} = -2$		
2	1			

Resumiendo:

-2	3			
		$-\frac{3}{2}$		
0	0		$\frac{3}{2}$	
		3		-1
1	3		$-\frac{5}{2}$	
		-2		
2	1			

La función $P_3(x)$ será:

$$P_3(x) = 3 - \frac{3}{2}(x-x_0) + \frac{3}{2}(x-x_0)(x-x_1) - 1(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

En definitiva:

$$P_3(x) = 3 - \frac{3}{2}(x+2) + \frac{3}{2}(x+2) \cdot x - (x+2) \cdot x \cdot (x-1)$$

Comprobemos la alternativa (a)

$$x = -1 \Rightarrow P_3(-1) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 3 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - 2 = -2 \neq -3$$

La alternativa (a) es falsa.

Comprobemos la alternativa (b)

$$x = 3 \Rightarrow P_3(3) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 5 + \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 3 - 5 \cdot 3 \cdot 2 = 3 - \frac{15}{2} + \frac{45}{2} - 30 = -27 + 15 = -12$$

La alternativa (b) es correcta

Por tanto: La alternativa correcta es (b)

No obstante vamos a comprobar si $P_3(x)$ está bien obtenido. Para ello comprobemos si pasa por los 4 puntos $A(-2, 3)$, $O(0, 0)$, $B(1, 3)$ y $C(2, 1)$

$$\bullet x = -2 \Rightarrow P_3(-2) = 3 - 0 + 0 - 0 = 3 \Rightarrow P_3(x) \text{ pasa por } A(-2, 3)$$

$$\bullet x = 0 \Rightarrow P_3(0) = 3 - \frac{3}{2} \cdot 2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow P_3(x) \text{ pasa por } O(0, 0)$$

$$\bullet x = 1 \Rightarrow P_3(1) = 3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 0 = 3 \Rightarrow P_3(x) \text{ pasa por } B(1, 3)$$

$$\bullet x = 2 \Rightarrow P_3(2) = 3 - 6 + 12 - 8 = 1 \Rightarrow P_3(x) \text{ pasa por } C(2, 1)$$

Únicamente existe un polinomio de grado 3 que pase por esos 4 puntos, por lo que el polinomio hallado es correcto.

Ejercicio nº 2.

$$f(x) = \cos x \rightarrow \text{función}$$

Nodos

$$x_0 = -\pi \rightarrow f(x_0) = f(-\pi) = \cos(-\pi) = -1 \rightarrow A(-\pi, -1)$$

$$x_1 = 0 \rightarrow f(x_1) = f(0) = \cos 0 = 1 \rightarrow B(0, 1)$$

$$x_2 = \pi \rightarrow f(x_2) = f(\pi) = \cos \pi = -1 \rightarrow C(\pi, -1)$$

Puntos

Se trata de 3 nodos equidistantes:

$$x_0 = -\pi ; x_1 = -\pi + \pi = 0 ; x_2 = 0 + \pi = \pi \quad \boxed{h = \pi}$$

$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rightarrow$ polinomio interpolador de grado 2 de la función $f(x) = \cos x$ relativo a los nodos x_0, x_1, x_2

Expresemos el polinomio $P_2(x)$ en forma de "polinomios factoriales dependientes",

Es decir:

$$P_2(x) = C_0 + C_1 \cdot (x - x_0) + C_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$P_2(x) = C_0 + C_1 \cdot (x + \pi) + C_2 \cdot (x + \pi) \cdot (x - 0) = C_0 + C_1(x + \pi) + C_2(x + \pi) \cdot x$$

Necesitamos hallar C_0, C_1, C_2

Construyamos el triángulo en diferencias progresivas:

Nodos

$$\begin{array}{lll} x_0 & f(x_0) & \\ x_1 & f(x_1) & \Delta f(x_0) \\ x_2 & f(x_2) & \Delta f(x_1) \end{array} \quad \Delta^2 f(x_0)$$

En nuestro caso concreto:

Nodos

$$\begin{array}{llll} -\pi & -1 & & \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ \pi & -1 & -2 & \end{array} \quad \text{avando} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0) \\ \Delta f(x_1) = f(x_2) - f(x_1) \\ \Delta^2 f(x_0) = \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0) \end{array} \right.$$

El polinomio buscado es:

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1! \cdot h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! \cdot h^2} (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

$$\boxed{P_2(x) = -1 + \frac{2}{\pi} (x + \pi) - \frac{4}{2 \cdot \pi^2} (x + \pi) \cdot x} \Rightarrow \boxed{P_2(x) = -1 + \frac{2}{\pi} (x + \pi) - \frac{2}{\pi^2} (x + \pi) \cdot x}$$

Comprobemos el apartado (a)

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \cdot \frac{\pi}{4} = -1 + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4}$$

$$P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{5}{2} - \frac{5}{8} = \frac{-8+20-5}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow \boxed{P_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{8}}$$

Conclusión: La alternativa correcta es (a)

No obstante vamos a comprobar que el polinomio encontrado pasa por los puntos $A(-\pi, -1)$; $B(0, 1)$; $C(\pi, -1)$

Vamos:

$$x = -\pi \Rightarrow P_2(-\pi) = -1 + \frac{2}{\pi} \cdot 0 - \frac{2}{\pi^2} \cdot 0 = -1 \Rightarrow \text{pasa por } A(-\pi, -1)$$

$$x = 0 \Rightarrow P_2(0) = -1 + \frac{2}{\pi} \cdot \pi - \frac{2}{\pi^2} \cdot 0 = -1 + 2 = 1 \Rightarrow \text{pasa por } B(0, 1)$$

$$x = \pi \Rightarrow P_2(\pi) = -1 + \frac{2}{\pi} \cdot 2\pi - \frac{2}{\pi^2} \cdot 2\pi \cdot \pi = -1 + 4 - 4 = -1 \Rightarrow \text{pasa por } C(\pi, -1)$$

Conclusión: Tenemos el problema bien.

Ejercicio nº 3.

$$f(x) = \text{sen } \frac{\pi x}{2} + \cos(\pi x) \rightarrow \text{función}$$

Nodos

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 1 \rightarrow f(x_0) = f(1) = \text{sen } \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 1 - 1 = 0 \\ x_1 = 2 \rightarrow f(x_1) = f(2) = \text{sen } \pi + \cos 2\pi = 0 + 1 = 1 \\ x_2 = 3 \rightarrow f(x_2) = f(3) = \text{sen } \frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = -1 - 1 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{PUNTOS } \begin{cases} A_0(1, 0) \\ A_1(2, 1) \\ A_2(3, -2) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \text{Tres nodos equidistantes } \begin{array}{c} x_0 \quad x_1 \quad x_2 \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \quad x \quad \boxed{h=1}$$

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rightarrow \text{polinomio interpolador de } f(x) \text{ relativo a los nodos } x_0, x_1, x_2$$

Vamos a construir el polinomio $P_2(x)$ en FORMA DE POLINOMIOS FACTORIALES

ASCENDENTES, considerando los nodos $x_0 = 1$; $x_1 = 1 + h = 2$; $x_2 = 2 + h = 3$

En este caso será:

$$P_2(x) = d_0 + d_1(x - x_2) + d_2(x - x_2) \cdot (x - x_1)$$

Es decir:

$$P_2(x) = d_0 + d_1(x - 3) + d_2(x - 3) \cdot (x - 2) \rightarrow \text{Buscamos } d_0, d_1, d_2$$

Para ello construimos el triángulo en diferencias repetidas:

Nodos

x_0	$f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$\nabla f(x_1)$	
x_2	$f(x_2)$	$\nabla f(x_2)$	$\nabla^2 f(x_2)$

En nuestro caso:

Nodos

1	0				
2	1	1	-4		
3	-2	-3			

seendo

$$\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f(x_1) = 1 \\ f(x_2) = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla f(x_1) = f(x_1) - f(x_0) \\ \nabla f(x_2) = f(x_2) - f(x_1) \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla^2 f(x_2) = \nabla f(x_2) - \nabla f(x_1) \end{cases}$$

El polinomio buscado es:

$$P_2(x) = f(x_2) + \frac{\nabla f(x_2)}{1! \cdot h^1} (x - x_2) + \frac{\nabla^2 f(x_2)}{2! \cdot h^2} (x - x_2) \cdot (x - x_1)$$

$$P_2(x) = -2 + \frac{-3}{1} (x - 3) + \frac{-4}{2} (x - 3) \cdot (x - 2) = -2 - 3(x - 3) - 2(x - 3) \cdot (x - 2)$$

Por tanto: $P_2(x) = -2 - 3(x - 3) - 2(x - 3) \cdot (x - 2)$

Analicemos las alternativas que nos ofrecen:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{2}\right) = -2 - 3\left(\frac{1}{2} - 3\right) - 2\left(\frac{1}{2} - 3\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right) = -2 + 3 \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} = -2$$

Por tanto, la alternativa correcta es (6)

No obstante, comprobemos que P_2 pasa por los puntos A_0, A_1, A_2

$$x_0 = 1 \Rightarrow P_2(1) = -2 - 3(1 - 3) - 2(1 - 3)(1 - 2) = -2 + 6 - 4 = 0 \rightarrow \text{O.K.}$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow P_2(2) = -2 - 3(2 - 3) - 2(2 - 3)(2 - 2) = -2 + 3 = 1 \rightarrow \text{O.K.}$$

$$x_2 = 3 \Rightarrow P_2(3) = -2 - 3(3 - 3) - 2(3 - 3)(3 - 2) = -2 \rightarrow \text{O.K.}$$

Conclusión: El problema está bien resuelto.

Ejercicio nº 4.-

$$f(x) = -\sin x + \cos x \quad \text{función}$$

Nodos

$$\left. \begin{aligned} x_0 = \pi &\rightarrow f(x_0) = f(\pi) = -\sin \pi + \cos \pi = 0 - 1 = -1 \rightarrow A_0(\pi, -1) \text{ punto} \\ x_1 = \frac{3\pi}{2} &\rightarrow f(x_1) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sin \frac{3\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 1 + 0 = 1 \rightarrow A_1\left(\frac{3\pi}{2}, 1\right) \text{ punto} \\ x_2 = 2\pi &\rightarrow f(x_2) = f(2\pi) = -\sin 2\pi + \cos 2\pi = 0 + 1 = 1 \rightarrow A_2(2\pi, 1) \text{ punto} \\ x_3 = \frac{5\pi}{2} &\rightarrow f(x_3) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -\sin \frac{5\pi}{2} + \cos \frac{5\pi}{2} = -1 + 0 = -1 \rightarrow A_3\left(\frac{5\pi}{2}, -1\right) \text{ punto} \end{aligned} \right\}$$

↳ Nótese que los nodos (4) son equidistantes $\rightarrow h = \frac{\pi}{2}$

$p(x) \rightarrow$ polinomio interpolador de $f(x)$ y de grado 3, relativo a los nodos x_0, x_1, x_2, x_3

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

El polinomio $p(x)$ en forma de polinomios factoriales descendentes es:

$$p(x) = C_0 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)(x-x_1) + C_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

En concreto:

$$p(x) = C_0 + C_1(x-\pi) + C_2(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) + C_3(x-\pi)\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)(x-2\pi)$$

Debemos hallar los coeficientes C_0, C_1, C_2, C_3

Veamos:

$$\bullet \text{ para } x = \pi \rightarrow p(\pi) = f(\pi) = -1$$

$$p(\pi) = C_0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = -1 \Rightarrow \boxed{C_0 = -1}$$

$$\bullet \text{ para } x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow p\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

$$p\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 + C_1 \cdot \left(\frac{3\pi}{2} - \pi\right) + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0 = 1 \Rightarrow \frac{\pi}{2} C_1 = 2 \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{4}{\pi}}$$

$$\bullet \text{ para } x = 2\pi \rightarrow p(2\pi) = f(2\pi) = 1$$

$$p(2\pi) = -1 + \frac{4}{\pi}(2\pi - \pi) + C_2 \cdot (2\pi - \pi) \cdot \left(2\pi - \frac{3\pi}{2}\right) + C_3 \cdot 0 = 1$$

$$-1 + 4 + \frac{\pi^2}{2} C_2 = 1 \Rightarrow \frac{\pi^2}{2} C_2 = -2 \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{4}{\pi^2}}$$

$$\bullet \text{ para } x = \frac{5\pi}{2} \rightarrow p\left(\frac{5\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1 + \frac{4}{\pi}\left(\frac{5\pi}{2} - \pi\right) - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{5\pi}{2} - \pi\right) \cdot \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) + C_3 \cdot \left(\frac{5\pi}{2} - \pi\right) \cdot \left(\frac{5\pi}{2} - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \left(\frac{5\pi}{2} - 2\pi\right)$$

$$p\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1 + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \pi + C_3 \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \pi \cdot \frac{\pi}{2} = -1$$

$$p\left(\frac{5\pi}{2}\right) = -1 + 6 - 6 + c_3 \frac{3\pi^3}{4} = -1$$

$$\frac{3\pi^3}{4} c_3 = 0 \Rightarrow \boxed{c_3 = 0}$$

Por tanto: $\boxed{p(x) = -1 + \frac{4}{\pi}(x-\pi) - \frac{4}{\pi^2}(x-\pi)\cdot(x-\frac{3\pi}{2})}$

Hallemos la derivada de $p(x)$:

$$p'(x) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left[(x - \frac{3\pi}{2}) + (x - \pi) \right]$$

Analicemos la alternativa (a)

$$p'(\pi) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \cdot (\pi - \frac{3\pi}{2}) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{-\pi}{2} = \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{6}{\pi}$$

Por tanto: la alternativa (a) es FALSA

Analicemos la alternativa (b)

$$p'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \left[0 + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{4}{\pi} - \frac{4 \cdot \pi}{2\pi^2} = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Por tanto: $\boxed{\text{La alternativa correcta es (b)}}$